

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دکتری
ریاضی نظری

انتقال جرم بین اندازه‌های تصادفی پایا

نگارش
علی خزلی

استاد راهنما
دکتر کسری علیشاهی

استاد راهنمای همکار
دکتر میرامید حاجی میرصادقی

شهریور ۱۳۹۵

تقدیم به همسر عزیزم که به من جان تازه‌ای بخشید

به نام او

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دکتری

عنوان: انتقال جرم بین اندازه‌های تصادفی پایا
نگارش: علی خزلی

کمیته داوران

امضاء:

دکتر کسری علیشاهی

استاد راهنما:

امضاء:

دکتر میرامید حاجی میرصادقی

استاد راهنمای همکار:

امضاء:

دکتر امیر دانشگر

ممتحن داخلی:

امضاء:

دکتر سید رضا مقدسی

ممتحن داخلی:

امضاء:

دکتر امید اعتصامی

داور خارجی:

امضاء:

دکتر محمد صادق زمانی

داور خارجی:

تاریخ:



اظهارنامه

(اصالت متن و محتوای رساله دکتری)

عنوان رساله: انتقال جرم بین اندازه‌های تصادفی پایا

نام استاد راهنما: کسری علیشاهی نام استاد راهنمای همکار: میرامید حاجی میرصادقی نام استاد مشاور:

این جانب: علی خزلی اظهار می‌دارم:

۱- متن و نتایج علمی ارائه شده در این رساله اصیل بوده و منحصرأ توسط این جانب و زیر نظر استادان (راهنما، همکار و مشاور) نام برده شده در بالا تهیه شده است.

۲- متن رساله به این صورت در هیچ جای دیگری منتشر نشده است.

۳- متن و نتایج مندرج در این رساله، حاصل تحقیقات این جانب به عنوان دانشجوی دکتری دانشگاه صنعتی شریف است.

۴- کلیه مطالبی که از منابع دیگر در این رساله مورد استفاده قرار گرفته، با ذکر مرجع مشخص شده است.

نام دانشجو: علی خزلی

تاریخ ۹۵، ۱۰، ۱۳

امضا

نتایج تحقیقات مندرج در این رساله و دستاوردهای مادی و معنوی ناشی از آن (شامل فرمول‌ها، نرم‌افزارها، سخت‌افزارها و مواردی که قابلیت ثبت اختراع دارد) متعلق به دانشگاه صنعتی شریف است. هیچ شخصیت حقیقی یا حقوقی بدون کسب اجازه از دانشگاه صنعتی شریف حق فروش و ادعای مالکیت مادی یا معنوی بر آن یا ثبت اختراع از آن را ندارد. همچنین کلیه حقوق مربوط به چاپ، تکثیر، نسخه‌برداری، ترجمه، اقتباس و نظائر آن در محیط‌های مختلف اعم از الکترونیکی، مجازی یا فیزیکی برای دانشگاه صنعتی شریف محفوظ است. نقل مطالب با ذکر مآخذ بلامانع است.

نام دانشجو: علی خزلی

تاریخ ۹۵، ۱۰، ۱۳

امضا

نام استادان راهنما: کسری علیشاهی، میرامید حاجی میرصادقی

تاریخ ۱۳۹۸، ۱۰، ۱۳

امضا

قدردانی

خدای بزرگ را شاکرم که همواره گشایش‌های متعددی در مسیر زندگی ام به خصوص از جنبه علمی قرار داده است.

از همسر عزیزم، پدر و مادرم و پدر و مادر همسرم تشکر می‌کنم که از همه نظر پشتیبانم بودند.
از اساتید راهنمایم آقایان دکتر کسری علیشاهی و میر امید حاجی میرصادقی تشکر می‌کنم که فواید و وظایف یک استاد از هیچ کمکی به من دریغ نکردند.
هم‌چنین از هرمان توریسون^۱ و گانتز لست^۲ به خاطر نظرات علمی مفیدشان تشکر می‌کنم.

^۱Hermann Thorisson

^۲Günter Last

انتقال جرم بین اندازه‌های تصادفی پایا

چکیده

در این پایان‌نامه هسته‌های انتقال هم‌ورد (یعنی ناوردا تحت انتقال) بین دو اندازه تصادفی پایا روی $\mathbb{R}^d$ را مطالعه می‌کنیم و الگوریتمی ارائه می‌کنیم که با فرض برقرار بودن شرطی خاص در مورد شدت‌های آن‌ها، چنین هسته انتقالی را می‌سازد. به عنوان یک نتیجه، یک انتقال تصادفی ساخته می‌شود که یک اندازه تصادفی ارگودیک را به نسخه پالم آن تبدیل کند و به عکس، توزیع آن اندازه تصادفی را از نسخه پالم آن بازسازی کند. الگوریتم ما با داشتن نمونه‌هایی از دو اندازه، هسته انتقال را به صورت غیرتصادفی می‌سازد. وجود این هسته‌های انتقال در [۱۸] ثابت شده است، اما با این حال، در سال‌های اخیر علاقه زیادی به روش‌های ساختنی وجود داشته است. روش ما تعمیم [۶] است که یک الگوریتم برای ساخت هسته انتقال بین اندازه لبگ و یک فرآیند نقطه‌ای ارگودیک در $\mathbb{R}^d$ ارائه می‌کند؛ به بیان دیگر، یک کاشی‌کاری فضا که به هر نقطه فرآیند یک کاشی با حجم واحد نسبت داده شود. . برای حالت کلی، مفهوم هسته‌های انتقال مقید و چگالی‌های انتقال مقید را تعریف می‌کنیم و خود را به آن محدود می‌کنیم. مفهوم پایداری چگالی‌های انتقال مقید را نیز معرفی می‌کنیم که شبیه مفهوم تطابق پایدار در گراف است. محدود شدن به چگالی‌های انتقال مقید نکته کلیدی در الگوریتم ما است و حاصل الگوریتم پایدار خواهد بود. برای چگالی‌های انتقال مقید پایدار، خواصی از جمله وجود، یکتایی، یکنوایی بر حسب اندازه‌ها و کران‌دار بودن را نیز بررسی می‌کنیم. ساختن یک تخصیص هم‌ورد، یعنی یک نگاشت انتقال هم‌ورد، اهمیت ویژه‌ای دارد. در این پایان‌نامه ضمن بررسی وجود چنین تخصیص‌هایی و حالات خاصی که با الگوریتم ما می‌توان یک تخصیص به دست آورد، الگوریتم‌های دیگری را برای یافتن تخصیص با شرایطی خاص ارائه خواهیم داد. به عنوان یک ابزار برای اثبات برخی نتایج، مفهوم هسته انتقال ورونوی برای یک اندازه را معرفی می‌کنیم که تعمیم سلول‌بندی ورونوی است و برخی خواص آن را نیز بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: اندازه تصادفی، پایایی، اندازه پالم، انتقال جرم، اصل انتقال جرم، تطابق پایدار، انتقال جرم با ظرفیت محدود، هسته انتقال ورونوی، جفت‌سازی انتقالی.

فهرست مطالب

پیش‌گفتار	سوم
مقدمه	۱
۱ مقدمات	۵
۱.۱ اندازه و اندازه شمارشی	۵
۲.۱ اندازه تصادفی و فرآیند نقطه‌ای	۶
۱.۲.۱ پایایی	۷
۳.۱ نقطه نمونه و توزیع پالم	۹
۴.۱ خواص ارگودیک	۱۱
۵.۱ انتقال جرم	۱۳
۱.۵.۱ انتقال جرم غیر تصادفی	۱۳
۲.۵.۱ انتقال جرم تصادفی	۱۶
۶.۱ اصل انتقال جرم	۱۷
۲ تاریخچه جفت سازی انتقالی و یافتن نقطه اضافه	۲۱
۱.۲ بازسازی یک اندازه تصادفی از روی نسخه پالم آن	۲۱
۲.۲ ارتباط با انتقال جرم	۲۵
۳.۲ حالت غیر ارگودیک	۲۷
۳ روش‌های موجود برای ساختن الگوی نقطه اضافه	۳۳
۱.۳ الگوی نقطه اضافه غیر تصادفی	۳۳
۲.۳ حالت فرآیند نقطه‌ای یک بُعدی	۳۴
۳.۳ تطابق پایدار بین لبگ و پواسون	۳۴
۴.۳ تخصیص پایدار از راست برای دو اندازه بدون اتم و نسبت به هم تکین در حالت یک بعدی	۳۷
۴ چگالی‌های انتقال مقید	۴۱
۱.۴ انتقال جرم مقید	۴۱
۲.۴ ساختن جفت‌سازی انتقالی و الگوی نقطه اضافه در حالت کلی	۴۲

۴۶	پایداری چگالی‌های انتقال مقید	۳.۴
۴۷	خواص دیگر چگالی‌های انتقال مقید و پایدار	۴.۴
۵۱	اثبات‌ها	۵.۴
۶۳	چند مثال	۶.۴
۶۹	۵ ساختن تخصیص موازنه‌گر	
۶۹	تخصیص‌های پایدار	۱.۵
۷۰	۱.۱.۵ چگالی انتقال مکان-بهینه در حالت‌های خاص	
۷۱	۲.۱.۵ بررسی وجود تخصیص پایدار در حالت کلی	
۷۳	۲.۵ فرآیند نقطه‌ای کمکی و مسئله تخصیص	
۷۶	۳.۵ ساختن تخصیص پایدار از راست در فضای یک بعدی	
۸۳	۶ هسته انتقال ورونوی برای یک اندازه	
۸۳	۱.۶ تعریف و خواص اولیه	
۸۵	۲.۶ پوش محدب ملایم یک اندازه	
۸۷	واژه نامه انگلیسی به فارسی	
۸۹	واژه نامه فارسی به انگلیسی	
۹۵	کتاب‌نامه	

پیش‌گفتار

هندسه تصادفی از شاخه‌های نوین ریاضی است که از احتمال هندسی برخاسته است. در احتمال هندسی خواص اشیای هندسی که ماهیت تصادفی دارند مطالعه می‌شود، مثلاً چندوجهی‌های تصادفی. در برخی مسائل در این زمینه با این سؤال مواجه می‌شویم که فضای نمونه آن مسئله چیست؟ مثال معروف آن مسئله سوزن بوفون^۱ است: اگر یک سوزن را به طور تصادفی در صفحه بیندازیم، چقدر احتمال دارد که خطوط افقی با مختصات صحیح را قطع کند؟ چون انتخاب یک نقطه تصادفی یکنواخت از کل صفحه معنی ندارد، صورت‌بندی دقیق این مسئله کاری نابديهی است. مسائل دیگری از این دست منجر به ایجاد شاخه هندسه تصادفی شد که این نام توسط کندال^۲ در سال ۱۹۶۹ انتخاب شده است. می‌توان موضوع هندسه تصادفی را مطالعه الگوهای نه‌لزوماً منظم از اشیای پخش شده در صفحه دانست. به عنوان مثال، فرایندهای نقطه‌ای، فرایندهای خطی، فرایندهای ذره‌ای و اندازه‌های تصادفی از اشیای پایه‌ای در هندسه تصادفی هستند که برای مدل‌سازی الگویی از نامتناهی شیء پخش شده در فضا (به ترتیب الگویی از نقاط، خطوط، اشکال هندسی و جرم پخش شده در فضا) به کار می‌روند. یک رده مهم از چنین الگوهای تصادفی، الگوهای پایا هستند که توزیع آن‌ها با اعمال انتقال‌های فضا تغییر نمی‌کنند؛ به تعبیر دیگر، الگوهای تصادفی که در آن همه‌جای فضا از نظر آماری مثل هم هستند. هرچند الگوهای پایا محدودتر هستند، اما همچنان ابزاری قوی برای مدل‌سازی هستند، خواص شگرفی دارند و برای مطالعه تحلیلی آن‌ها ابزارهای بیشتری وجود دارد. به عنوان مثال، توزیع‌های پالم و اصل انتقال جرم ابزارهایی هستند که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند.

علی خزلی

شهریور ماه ۱۳۹۵ هجری شمسی

^۱Buffon's needle

^۲D.G. Kendall

مقدمه

فرآیندهای نقطه‌ای و اندازه‌های تصادفی از مفاهیم پایه‌ای هندسه تصادفی هستند. یک فرآیند نقطه‌ای آرایشی تصادفی از نقاط در $\mathbb{R}^d$ است و یک اندازه تصادفی اندازه‌ای روی $\mathbb{R}^d$ است که به صورت تصادفی انتخاب شده باشد. یک رده مهم از اندازه‌های تصادفی، اندازه‌های تصادفی پایا است؛ به این معنی که توزیع آن با انتقال‌های $\mathbb{R}^d$ تغییر نکند. این مفهوم مشابه پایایی فرآیندهای تصادفی است، با این تفاوت که شیفت زمان جای خود را به انتقال در $\mathbb{R}^d$ می‌دهد. یکی از مفاهیم مهم در اندازه‌های تصادفی پایا، مفهوم اندازه پالم است. به طور شهودی، در حالتی که Ψ یک اندازه تصادفی پایا و ارگودیک روی $\mathbb{R}^d$ باشد، نسخه پالم Ψ با نگاه کردن به Ψ از یک نقطه نمونه Ψ به دست می‌آید و اندازه پالم Ψ همان توزیع نسخه پالم Ψ است. چند روش معادل برای دقیق کردن تعریف نقطه نمونه و اندازه پالم وجود دارد. سال‌ها بعد از ارائه شدن این روش‌ها، نتایج [۱۸] نشان می‌دهد که نقطه تصادفی Y وجود دارد که با نگاه کردن به Ψ از Y (یعنی با انتقال Ψ با بردار $-Y$) دقیقاً نسخه پالم Ψ را به دست می‌آوریم (بخش ۱.۲ را ببینید). به عبارت دیگر، یک جفت‌سازی از Ψ و نسخه پالم آن وجود دارد که همیشه انتقالی از یکدیگر هستند. چنین جفت‌سازی‌ای یک جفت‌سازی انتقالی نامیده می‌شود.

برای یافتن جفت‌سازی انتقالی مانند فوق، می‌توان از یک هسته انتقال^۳ موازنه‌گر تصادفی استفاده کرد که هسته انتقالی است که مضربی از اندازه لبگ را به Ψ تبدیل می‌کند. منظور از یک هسته انتقال تصادفی، تابعی تصادفی است که به هر نقطه $s \in \mathbb{R}^d$ و هر ω در فضای نمونه، اندازه احتمال $T_\omega(s, \cdot)$ روی $\mathbb{R}^d$ را نسبت می‌دهد. این اندازه را می‌توان این طور تعبیر کرد که جرم بی‌نهایت کوچک حول s چگونه در فضا پخش شده است. اگر T به طور هم‌خوان تحت انتقال به Ψ بستگی داشته باشد (که در این جا آن را هم‌ورد می‌نامیم)، آنگاه با انتخاب Y به طوری که توزیع شرطی آن به شرط Ψ برابر با $T_\omega(o, \cdot)$ باشد، یک جفت‌سازی انتقالی به دست می‌آوریم ([۱۳]، [۸] و هم‌چنین فصل ۲ را ببینید). یک حالت خاص که بسیار مورد توجه بوده است، این است که Y تابعی از Ψ باشد، یعنی $T_\omega(s, \cdot)$ تقریباً همیشه یک اندازه دیراک در $\mathbb{R}^d$ باشد. در این حالت، با دانستن Ψ توزیع Y غیر تصادفی خواهد بود و برای جفت‌سازی انتقالی نیاز به تصادف اضافه (یعنی گسترش فضای نمونه) نداریم.

فرض کنید Φ و Ψ دو اندازه تصادفی پایا و ارگودیک روی $\mathbb{R}^d$ باشند. مطالعه هسته‌های انتقال هم‌ورد که بین Φ و Ψ موازنه برقرار می‌کنند (یعنی Φ را به Ψ تبدیل می‌کنند) در سال‌های اخیر بسیار مورد توجه بوده است. با فرض این که شدت Φ و Ψ برابر، مثبت و متناهی باشد، در [۱۳] یک اثبات وجودی ارائه شده است که ایده اصلی آن بر اساس نتایج [۱۸] است. با این وجود، در سال‌های اخیر علاقه زیادی برای ارائه روش‌های ساختنی

^۳Transport kernel

در حالت‌های خاص وجود داشته است. یکی از دلایل این امر این است که چنین هسته‌های انتقالی منجر به ساختن جفت‌سازی انتقالی به صورت صریح می‌شوند. اولین روش ساختنی در [۱۴] ارائه شد که در حالت یک بعدی یک تخصیص موازنه‌گر برای یک فرآیند نقطه‌ای ارگودیک ارائه کرده است. شاخص‌ترین کار در این زمینه [۶] است که روش ساختنی برای فرآیند نقطه‌ای ارگودیک در بعد دلخواه ارائه کرده است. روش‌های ساختنی دیگری نیز برای فرآیندهای نقطه‌ای ارائه شده اند، مانند تخصیص بر اساس جاذبه گرانشی [۲]، انتقال بهینه [۱۱] و ... در حالت یک‌بعدی، با شرایطی خاص یک تخصیص موازنه‌گر برای اندازه‌های تصادفی ارگودیک در [۱۲] ارائه شده است. در فصل ۳ مروری بر برخی از این روش‌ها خواهیم داشت. یکی از اصلی‌ترین کارهای این پایان‌نامه، ارائه یک روش ساختنی برای دو اندازه تصادفی در حالت کلی است که ما را قادر می‌سازد تا

- یک هسته انتقال هم‌ورد بسازیم که بین دو اندازه تصادفی پایا و ارگودیک در $\mathbb{R}^d$ با شدت برابر موازنه برقرار کند (قضیه ۹.۴)

- و یک جفت‌سازی انتقالی برای یک اندازه تصادفی ارگودیک دلخواه در $\mathbb{R}^d$ و نسخه پالم آن بسازیم (قضیه ۱۰.۴).

برای این کار، مفهوم چگالی انتقال مقید پایدار را معرفی می‌کنیم که تعمیم مفهوم تخصیص پایدار (معرفی شده در [۶]) است. مفهوم چگالی انتقال مقید حالت خاصی از انتقال جرم با ظرفیت محدود^۴ است که در [۱۱] معرفی شده است. اولین نتیجه (قضیه ۱۵.۴)، که یک خاصیت غیر تصادفی است، این است که چگالی انتقال مقید پایدار وجود دارد و یک مثال از آن توسط الگوریتم ما (الگوریتم ۵.۴) حاصل می‌شود. نتیجه مهم دیگر این است که حاصل الگوریتم را در حالت تصادفی در نظر بگیریم که در بالا در مورد آن صحبت کردیم. خواص دیگری از چگالی‌های انتقال مقید پایدار را بررسی می‌کنیم، مانند یکنوایی بر حسب اندازه‌ها (قضیه ۲۴.۴)، بهینه بودن (نتیجه ۲۵.۴) و کران‌دار بودن محل جرم خارج شده از یک ناحیه (قضیه ۲۹.۴). این نتایج تعمیمی از نتایج مقاله حائز اهمیت [۶] هستند و برخی نتایج آن را تعمیم می‌دهند.

برای توجیه استفاده از هسته‌های انتقال در حالت کلی، مثال‌هایی خواهیم آورد که تخصیص موازنه‌گر هم‌ورد وجود ندارد. اما در حالات خاص تخصیص‌های هم‌ورد بسیار مورد توجه بوده‌اند. بنابراین در مورد وجود و ساختن تخصیص‌های موازنه‌گر پایدار با فرض‌های اضافه، در فصل ۵ بحث خواهیم کرد. در این فصل الگوریتم‌های دیگری نیز برای ساختن تخصیص با شرایطی خاص ارائه می‌کنیم و چند مسئله باز در این مورد مطرح می‌کنیم. به عنوان یک ابزار برای اثبات ساده‌تر برخی نتایج، مفهوم هسته انتقال ورونوی برای یک اندازه را معرفی می‌کنیم که تعمیم سلول‌بندی ورونوی برای یک مجموعه است. این مفهوم به خودی خود جالب به نظر می‌رسد و برخی خواص آن را در فصل ۶ بررسی می‌کنیم.

با استفاده از ابزارهای [۱۳]، الگوریتم‌ها و نتایج این پایان‌نامه می‌توانند برای اندازه‌های تصادفی روی گروه‌های توپولوژیک جابجایی و موضعاً فشرده نیز تعمیم داده شوند، اما برای خوانایی ساده‌تر پایان‌نامه و تمرکز روی ایده‌های اصلی خود را به $\mathbb{R}^d$ و $\mathbb{Z}^d$ محدود می‌کنیم. ابزارهای اصلی استفاده شده در این پایان‌نامه، اندازه پالم و اصل انتقال جرم هستند که در فصل ۱ معرفی خواهند شد.

^۴Capacity constrained transport kernel

ساختار این پایان‌نامه به صورت زیر است. در فصل ۱ مقدماتی در مورد اندازه‌های تصادفی، پایایی و ارگودیک بودن، اندازه پالم و اصل انتقال جرم ارائه می‌کنیم. در فصل ۲ تاریخچه و نتایج مربوط به مسئله جفت‌سازی انتقالی را با تفصیل بیش‌تر مرور می‌کنیم. در فصل ۳ چند روش که پیش از این برای ساختن جفت‌سازی انتقالی ارائه شده اند را مرور می‌کنیم، زیرا در این پایان‌نامه آن روش‌ها را تعمیم خواهیم داد. نتایج اصلی این پایان‌نامه فصل‌های ۴، ۵ و ۶ هستند. در فصل ۴ الگوریتم اصلی این نوشتار و مفهوم چگالی انتقال مقید پایدار را ارائه می‌کنیم و خواص آن را بررسی می‌کنیم. در مورد وجود تخصیص‌های موازنه‌گر پایدار و هم‌چنین ساختن آن‌ها در شرایط خاص در فصل ۵ بحث می‌کنیم و الگوریتم‌های دیگری نیز برای این منظور ارائه می‌کنیم. در نهایت، مفهوم چگالی انتقال ورونوی را در فصل ۶ معرفی می‌کنیم و خواص آن را بررسی می‌کنیم. نتایج فصل ۴ این پایان‌نامه در [۵] منتشر شده است.

فصل ۱

مقدمات

در این فصل مفاهیم و خواص پایه‌ای مورد استفاده در این پایان‌نامه را توضیح می‌دهیم. سعی شده است این مفاهیم با تفصیل مناسب آورده شود تا همین فصل برای آشنایی با مقدمات مورد نیاز نسبتاً کافی باشد. در این پایان‌نامه تعاریف و نتایج را در فضای $\mathbb{R}^d$ بیان می‌کنیم. همین تعاریف و نتایج با تغییر جزئی در فضای $\mathbb{Z}^d$ نیز معتبر هستند و از تکرار آن‌ها برای $\mathbb{Z}^d$ خودداری می‌کنیم. با استفاده از ابزارهای [۱۳]، الگوریتم‌ها و نتایج این پایان‌نامه می‌توانند برای اندازه‌های تصادفی روی گروه‌های توپولوژیک جابجایی و موضعاً فشرده نیز تعمیم داده شوند، اما برای خوانایی ساده‌تر پایان‌نامه و تمرکز روی ایده‌های اصلی خود را به $\mathbb{R}^d$ و $\mathbb{Z}^d$ محدود می‌کنیم.

قرارداد ۱.۱. مکمل، درون و مرز مجموعه A را به A^c ، A° و ∂A نشان می‌دهیم. همچنین تابع مشخصه A را با 1_A نشان می‌دهیم. منظور از $B_r(x)$ گوی بسته به شعاع r حول x است. سیگما-میدان بول روی $\mathbb{R}^d$ را با $\mathcal{B}$ نشان می‌دهیم و اندازه لبگ روی $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B})$ را با $\mathcal{L}_d$ اگر در مورد بعد ابهام نباشد، اندازه لبگ را با $\mathcal{L}$ نیز نشان می‌دهیم.

۱.۱ اندازه و اندازه شمارشی

اندازه φ روی $\mathbb{R}^d$ را موضعاً متناهی^۱ می‌نامیم هرگاه روی مجموعه‌های فشرده متناهی باشد. مجموعه تمام اندازه‌های موضعاً متناهی روی $\mathbb{R}^d$ را با $M(\mathbb{R}^d)$ یا M نشان می‌دهیم. **محمل**^۲ اندازه φ کوچکترین مجموعه بسته $A \subseteq \mathbb{R}^d$ است که $\varphi(\mathbb{R}^d \setminus A) = 0$. محمل φ را با $\text{supp}(\varphi)$ نشان می‌دهیم.

قرارداد ۲.۱. در این پایان‌نامه تمام اندازه‌ها روی $\mathbb{R}^d$ را عضوی از M فرض می‌کنیم.

یک اتم برای اندازه φ نقطه‌ای مانند $x \in \mathbb{R}^d$ است که $\varphi(\{x\}) > 0$. حالت خاصی از اندازه‌های دارای اتم، اندازه‌های شمارشی هستند. اگر D یک زیرمجموعه گسسته $\mathbb{R}^d$ باشد، آنگاه $\delta_x := \sum_{x \in D} \delta_x$ را یک اندازه

^۱Locally finite

^۲Support

شمارشی ساده^۳ می‌نامیم. در اینجا δ_x اندازه دیراک^۴ روی نقطه x است؛ یعنی $\delta_x(A) = 1_{x \in A}$. بنابراین $\varphi(A)$ همان تعداد نقاط داخل A است. همچنین اگر $r : D \rightarrow \mathbb{Z}^{\geq 0}$ یک تابع نامنفی باشد، آنگاه $\varphi := \sum_{x \in D} r(x) \delta_x$ را یک اندازه شمارشی^۵ می‌نامیم. در حالت کلی، اندازه φ یک اندازه شمارشی است اگر و تنها اگر صحیح مقدار باشد؛ به عبارت دیگر برای هر مجموعه بول A داشته باشیم $\varphi(A) \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$. همچنین اندازه شمارشی φ یک اندازه شمارشی ساده است اگر و تنها اگر اندازه همه اتم‌های آن برابر با ۱ باشند. اگر φ_1 و φ_2 دو اندازه باشند، منظور از $\varphi_1 \leq \varphi_2$ این است که برای هر مجموعه بول A داشته باشیم $\varphi_1(A) \leq \varphi_2(A)$. در حالتی که هر دو اندازه‌های شمارشی ساده باشند، این به این معنی است که φ_1 حامل φ_2 زیرمجموعه‌ای از حامل φ_2 باشد. اگر φ یک اندازه و $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع نامنفی باشد، منظور از $f\varphi$ اندازه‌ای است که از اریب کردن φ توسط f به دست می‌آید؛ یعنی

$$(f\varphi)(A) = \int_A f(x) d\varphi(x).$$

به عبارت دیگر، $f\varphi$ اندازه‌ای است که مشتق رادون-نیکودایم آن نسبت به φ برابر با f باشد.

۲.۱ اندازه تصادفی و فرآیند نقطه‌ای

فضای M را می‌توان به طور طبیعی به یک سیگما-میدان مجهز کرد؛ M کوچک‌ترین سیگما-میدانی روی M است که به ازای هر $A \in \mathcal{B}$ ، تابع $\varphi \mapsto \varphi(A)$ اندازه‌پذیر باشد. در این پایان‌نامه فضای اندازه $(\Omega, \mathcal{F})$ را معلوم فرض می‌کنیم. منظور از یک اندازه تصادفی^۶، یک زوج $(\mathbb{P}, \Psi)$ است که $\mathbb{P}$ یک اندازه احتمال روی $(\Omega, \mathcal{F})$ است و $\Psi : \Omega \rightarrow M$ یک تابع اندازه‌پذیر است. توجه کنید که هر چند اندازه احتمال $\mathbb{P}$ نیز معمولاً معلوم فرض می‌شود، اما در تعریف اندازه تصادفی آن را ثابت نمی‌گیریم، زیرا در تعریف توزیع پالم اندازه دیگری روی همان فضای $(\Omega, \mathcal{F})$ تعریف خواهد شد. در صورتی که در مورد $\mathbb{P}$ ابهام نباشد، برای راحتی از Ψ به جای $(\mathbb{P}, \Psi)$ استفاده می‌کنیم. یک فرآیند نقطه‌ای^۷ یک اندازه تصادفی است که روی اندازه‌های شمارشی ساده متمرکز باشد.

با توجه به این که در این پایان‌نامه با اندازه‌هایی که روی فضای اندازه‌ها تعریف شده‌اند سر و کار داریم، دو معنی متفاوت از عبارت "تقریباً همه جا" برداشت می‌شود؛ یکی مربوط به فضای احتمال و دیگری مربوط به یک اندازه روی $\mathbb{R}^d$. برای جلوگیری از سردرگمی، از عبارت "تقریباً همیشه"^۸ تنها برای فضای احتمال استفاده می‌کنیم و از عبارت‌های "تقریباً همه جا"^۹ و "تقریباً هر"^{۱۰} تنها برای اندازه‌هایی که روی $\mathbb{R}^d$ یا $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ تعریف شده‌اند

^۳Simple counting measure

^۴Dirac measure

^۵Counting measure

^۶Random measure

^۷Point process

^۸Almost sure (a.s.)

^۹Almost everywhere (a.e.)

^{۱۰}Almost all (a.a.)

استفاده می‌کنیم. توزیع^{۱۱} اندازه تصادفی $(\mathbb{P}, \Psi)$ ، همان $\Psi_*\mathbb{P}$ است که توزیعی روی M است؛ یعنی اندازه احتمال $(\Psi_*\mathbb{P})(A) := \mathbb{P}(\Psi \in A)$. به عکس، اگر $\mathcal{P}$ یک اندازه احتمال روی $(M, \mathcal{M})$ باشد، توزیع یک اندازه تصادفی را مشخص می‌کند. یک انتخاب طبیعی برای چنین اندازه تصادفی $(\mathcal{P}, \text{id})$ روی فضای اندازه $(M, \mathcal{M}) := (\Omega, \mathcal{F})$ است که در آن id تابع همانی روی M است.

۱.۲.۱ پایایی

عمل انتقال در $\mathbb{R}^d$ روی $M(\mathbb{R}^d)$ نیز عمل می‌کند؛ به این صورت که

$$\begin{aligned}\theta_t(x) &:= x - t, \quad \forall x, t \in \mathbb{R}^d, \\ (\theta_t\varphi)(A) &:= \varphi(A + t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^d, \forall \varphi \in M, \forall A \in \mathcal{B}.\end{aligned}$$

توزیع $\mathcal{P}$ روی M را یک توزیع پایا^{۱۲} می‌گویند هرگاه تحت انتقال ناورد باشد؛ به عبارت دیگر برای هر $t \in \mathbb{R}^d$ داشته باشیم $(\theta_t)_*\mathcal{P} = \mathcal{P}$. به طور کلاسیک، پایایی یک اندازه تصادفی به صورت پایایی توزیع آن به معنای فوق تعریف می‌شده است، اما این تعریف از پایایی محدودیت‌هایی دارد. به عنوان مثال، در چنین شرایطی مطالعه همزمان دو اندازه تصادفی نیاز به تعاریف جدید خواهد داشت. بنابراین در این پایان‌نامه از قالب کلی‌تری بر اساس [۱۵] استفاده می‌کنیم که در ادامه می‌آوریم.

در سرتاسر این پایان‌نامه، فرض می‌کنیم $(\Omega, \mathcal{F})$ یک فضای بورل^{۱۳} است که مجهز به یک شار اندازه‌پذیر است؛ یعنی خانواده توابع $\theta_s : \Omega \rightarrow \Omega$ که به ازای هر $s \in \mathbb{R}^d$ تعریف شده است به طوری که $(\omega, s) \mapsto \theta_s\omega$ تابعی اندازه‌پذیر است، θ_* تابع همانی روی Ω است و

$$\theta_s \circ \theta_t = \theta_{s+t}, \quad \forall s, t \in \mathbb{R}^d.$$

به عبارت دیگر، این شار یک عمل اندازه‌پذیر $\mathbb{R}^d$ روی $(\Omega, \mathcal{F})$ است. فرض بورل بودن $(\Omega, \mathcal{F})$ برای تضمین وجود احتمال شرطی منظم قرار داده شده است که در بخش ۴.۱ مورد نیاز است. در همه کاربردهای این پایان‌نامه، می‌توان فضای نمونه را یک فضای بورل فرض کرد. برای تعریف و جزئیات بیشتر در مورد فضاهای بورل به [۳] یا [۹] مراجعه کنید.

با کمی تساهل در نمادگذاری، می‌توان از θ_s به عنوان انتقال تعبیر کرد که روی M و همچنین فضای توابع روی $\mathbb{R}^d$ یا $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ نیز تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\theta_s\varphi(B) &:= \varphi(B + s), \\ (\theta_sf)(x) &:= f(x + s), \\ (\theta_sf)(x, y) &:= f(x + s, y + s).\end{aligned}$$

^{۱۱}Distribution

^{۱۲}Stationary measure

^{۱۳}Borel space

با این نمادها، هر تابع H بین دو فضای مجهز به شار را همورد^{۱۴} می‌نامیم هرگاه $H \circ \theta_s = \theta_s \circ H$. برای تابع H تعریف شده روی Ω ، $H(\omega)$ را با نماد H_ω نیز نشان می‌دهیم. به طور خاص، خاصیت زیر را داریم.

نکته ۳.۱. اگر X یک فضای مجهز به شار باشد، تناظری یک‌به‌یک بین توابع (نه لزوماً همورد) از Ω به X و توابع همورد از $\Omega \times \mathbb{R}^d$ به X وجود دارد، به این صورت که

$$H(\omega, s) := \theta_{-s} K(\theta_s \omega)$$

برای $K : \Omega \rightarrow X$. هم‌چنین توجه کنید که $K(\omega) = H(\omega, 0)$. به عبارت دیگر، هر تابع همورد روی $\Omega \times \mathbb{R}^d$ با اثر آن روی مبدأ به طور یکتا مشخص می‌شود.

اندازهٔ احتمال $\mathbb{P}$ روی Ω را پایا^{۱۵} می‌گوییم هرگاه به ازای هر s در $\mathbb{R}^d$ ، تحت θ_s ناورد باشد. منظور از یک اندازهٔ تصادفی پایا^{۱۶}، یک اندازهٔ تصادفی $(\mathbb{P}, \Psi)$ است که $\mathbb{P}$ یک اندازهٔ پایا و $\Psi : \Omega \rightarrow M$ همورد است. این خاصیت نتیجه می‌دهد که توزیع Ψ یک توزیع پایا به معنای کلاسیک است؛ یعنی $\mathbb{P}[\Psi \in A] = \mathbb{P}[\theta_s \Psi \in A]$ برای هر $A \in \mathcal{M}$ و $s \in \mathbb{R}^d$. پایایی Ψ با این تعریف کلی‌تر از پایایی توزیع آن است.

اگرچه پایایی شرطی بسیار قوی است، اما اندازه‌های تصادفی پایا هم‌چنان ویژگی‌های پیچیده‌ای دارند. به علاوه، پایایی نتایج خارق العاده‌ای به همراه دارد که قابل انتظار نیستند (برای مثال، نکتهٔ ۱۵.۲ و نتایج فصل ۴ را ببینید).

تعریف ۴.۱. اندازهٔ شدت^{۱۷} اندازهٔ تصادفی Ψ به صورت $\Lambda(A) := \mathbb{E}[\Psi(A)]$ تعریف می‌شود. می‌توان دید Λ یک اندازه روی $\mathbb{R}^d$ است. در صورتی که Ψ پایا باشد، Λ تحت انتقال ناورد است و در نتیجه عدد $\lambda \in [0, \infty]$ وجود دارد که $\Lambda(A) = \lambda \mathcal{L}(A)$. در این صورت λ را شدت^{۱۸} Ψ می‌نامیم.

قرارداد ۵.۱. در این پایان‌نامه هر وقت از یک اندازهٔ تصادفی پایا صحبت می‌کنیم، فرض می‌کنیم شدت آن متناهی است.

لم ۶.۱. فرض کنید Ψ یک اندازهٔ تصادفی پایا باشد که تقریباً همیشه $\Psi(\mathbb{R}^d) > 0$. اگر $V \subseteq \mathbb{R}^d$ مجموعه‌ای باشد که شامل گوی‌های به‌دلخواه بزرگ است، آنگاه تقریباً همیشه $\Psi(V) = \infty$.

اثبات. فرض کنید $\delta > 0$ و $\mathbb{P}[\Psi(V) < \infty] = 2\delta > 0$ و $\epsilon > 0$ را دلخواه بگیرید. این فرض نتیجه می‌دهد که $R > 0$ وجود دارد که $\delta > \mathbb{P}[\Psi(V \setminus B_R(0)) < \epsilon]$. برای یک $r > 0$ دلخواه، $\widetilde{B}_r \subseteq V \setminus B_R(0)$ را یک گوی به شعاع r بگیرید، که وجود آن از آنچه در مورد V فرض کرده‌ایم نتیجه می‌شود. طبق پایایی نتیجه می‌گیریم

$$\mathbb{P}[\Psi(B_r(0)) < \epsilon] = \mathbb{P}[\Psi(\widetilde{B}_r) < \epsilon] \geq \mathbb{P}[\Psi(V \setminus B_R(0)) < \epsilon] > \delta.$$

با میل دادن r به بینهایت به دست می‌آوریم $\mathbb{P}[\Psi(\mathbb{R}^d) \leq \epsilon] \geq \delta$. با توجه به این که ϵ دلخواه است، نتیجه می‌گیریم $\delta \geq \mathbb{P}[\Psi(\mathbb{R}^d) = 0]$ و این یک تناقض است. $\square$

^{۱۴}Covariant

^{۱۵}Stationary

^{۱۶}Stationary random measure

^{۱۷}Intensity measure

^{۱۸}Intensity

۳.۱ نقطه نمونه و توزیع پالم

برای روشن شدن ایده توزیع پالم، از یک مثال استفاده می‌کنیم. فرض کنید Ψ یک فرآیند نقطه‌ای باشد که می‌تواند شامل بی‌نهایت نقطه باشد. در بعضی کاربردها علاقه‌مندیم متوسط یک کمیت را روی نقاط این فرآیند محاسبه کنیم. برای مثال، فرض کنید Ψ مجموعه استفاده‌کنندگان از تلفن همراه در یک لحظه خاص (که یک مدل تصادفی برای آن در $\mathbb{R}^2$ در نظر گرفته‌ایم) و Φ مجموعه آنتن‌های مخابراتی باشد. هر تلفن همراه به یک آنتن اختصاص داده می‌شود و می‌خواهیم متوسط فاصله یک تلفن همراه تا آنتن مخابراتی متناظر با آن را در نظر بگیریم. توجه کنید که هم باید روی نقاط فرآیند میانگین بگیریم و هم روی تصادف موجود در فرآیند نقطه‌ای. در حالت پایا مشکل این است که تعداد نقاط نامتناهی است.

قدرت فرض پایایی این امکان را فراهم می‌کند که به روش‌های مختلفی میانگین‌های به شکل فوق را تعریف کرد. یک روش این است که یک گوی بزرگ در نظر بگیریم و روی نقاط داخل آن گوی میانگین بگیریم و شعاع گوی را به بینهایت میل دهیم (البته این روش در حالت غیر ارگودیک نیاز به اصلاح دارد. فصل ۴.۱ را ببینید). روش دیگر این است که به شرط این که در ϵ -همسایگی مبدأ مختصات نقطه‌ای از فرآیند موجود باشد، امید ریاضی کمیت مورد نظر برای آن نقطه را در نظر بگیریم و ϵ را به صفر میل دهیم (از این روش در حالت غیر پایا نیز استفاده می‌شود). روش دیگر استفاده از اندازه کمپبل^{۱۹} است. در حالت پایا همه این روش‌ها خوش‌تعریف هستند و با یکدیگر معادل خواهند بود. با این ایده‌ها، در واقع یک فرآیند نقطه‌ای شامل مبدأ به دست می‌آید با این تعبیر که از نگاه کردن به فرآیند نقطه‌ای اولیه از یک نقطه نمونه آن به دست آمده است. به علاوه، برای میانگین گرفتن یک کمیت روی نقاط فرآیند نقطه‌ای اولیه، کافی است آن کمیت را برای مبدأ در فرآیند نقطه‌ای ثانویه در نظر بگیریم و سپس امید ریاضی بگیریم (برای روشن شدن این تعبیر مثال ۱۰.۱ را ببینید). توزیع این فرآیند نقطه‌ای ثانویه، همان اندازه پالم خواهد بود که در این بخش معرفی می‌کنیم. در این جا از رویکرد جدید برای توزیع پالم استفاده می‌کنیم که توسط متس^{۲۰} ([۱۵]) و مکه ([۱۶]) معرفی شده است. برای توضیحات بیشتر در مورد این روش و سایر روش‌ها [۳] را ببینید. فرض کنید B یک مجموعه بول و H تابعی روی Ω باشد. کمیت زیر را در نظر بگیرید

$$\int_{\mathbb{R}^d} H(\theta_s \omega) \mathbf{1}_B(s) \Psi_\omega(ds).$$

در مورد مثالی که در ابتدای این بخش گفتیم، $H(\omega)$ را فاصله تلفن همراه موجود در مبدأ مختصات تا آنتن اختصاص داده شده به آن در نظر بگیرید (به ازای ω هایی که در مبدأ مختصات تلفن همراه موجود نباشد H را دلخواه تعریف کنید). در این صورت کمیت فوق جمع فاصله تلفن‌های همراه موجود در B از آنتن‌های متناظر با آن‌ها است.

تعریف ۷.۱. توزیع پالم^{۲۱} اندازه تصادفی $(\mathbb{P}, \Psi)$ ، توزیعی روی Ω است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbb{P}_\Psi(A) := \frac{\mathbf{1}}{\lambda_\Psi \mathcal{L}_d(B)} \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_A(\theta_s) \mathbf{1}_B(s) \Psi(ds) \right],$$

^{۱۹}Campbell measure^{۲۰}Matthes^{۲۱}Palm distribution

که در آن B یک مجموعه بول دلخواه با اندازه لبگ مثبت و متناهی است و θ_s را به عنوان متغیر تصادفی $\omega \mapsto \theta_s \omega$ در نظر می‌گیریم.

پایایی نتیجه می‌دهد که این تعریف مستقل از B است. در واقع، اگر حاصل امید ریاضی سمت راست را به عنوان اندازه مجموعه $B \times A$ در نظر بگیریم، یک اندازه روی $\mathbb{R}^d \times \Omega$ به دست می‌آید. این اندازه نسبت به انتقال‌های مؤلفه اول ناوردا است و در نتیجه به شکل $\lambda \mathcal{L}(B) \mathbb{P}_\Psi(A)$ تجزیه می‌شود. اندازه تصادفی $(\mathbb{P}_\Psi, \Psi)$ را نسخه پالم طبیعی Ψ می‌نامیم. توجه کنید که Ψ تغییری نکرده است و فقط اندازه احتمال عوض شده است. برای راحتی، نسخه پالم Ψ را با $\tilde{\Psi}$ نشان می‌دهیم تا با Ψ اشتباه گرفته نشود. همچنین هر اندازه تصادفی که هم‌توزیع با نسخه پالم طبیعی Ψ باشد را یک نسخه پالم^{۲۲} برای Ψ به حساب می‌آوریم. تعریف فوق نتیجه می‌دهد که

$$\mathbb{E}_\Psi[H] = \frac{1}{\lambda_\Psi \mathcal{L}_d(B)} \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^d} H(\theta_s) 1_B(s) \Psi(ds) \right] \quad (1.1)$$

که در آن H یک تابع اندازه پذیر نامنفی $H: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ است و $\mathbb{E}_\Psi$ امید ریاضی نسبت به $\mathbb{P}_\Psi$ است. طبق این عبارت تعبیر زیر برقرار است

$$\mathbb{E}_\Psi[H] \text{ همان متوسط } H(\theta_s \omega) \text{ به ازای } s \in B \text{ و } \omega \in \Omega \text{ است.}$$

تعبیر دیگر توزیع پالم این است که ابتدا اندازه $\mathbb{P}$ را با ضریبی متناسب با $\Psi_\omega(B)$ اریب کنیم و سپس یک نقطه تصادفی از B با توزیع متناسب با $\Psi|_B$ را با یک انتقال به مبدأ منتقل کنیم.

مثال ۸.۱. فرض کنید $\Psi = \lambda \mathcal{L}$ که $\lambda > 0$ عددی معلوم است. در این صورت شدت Ψ برابر با λ است و اندازه پالم Ψ همان $\mathbb{P}$ است. برای دیدن این موضوع، توجه کنید که در این حالت، با جابجایی امید ریاضی و انتگرال در تعریف ۷.۱ و حافظ اندازه بودن شار به دست می‌آوریم $\mathbb{P}_\Psi(A) = \mathbb{P}[A]$.

مثال ۹.۱. فرض کنید Ψ_1 و Ψ_2 دو اندازه تصادفی با شدت‌های λ_1 و λ_2 باشند. یک سکه پرتاب کنید و در صورتی که شیر آمد Ψ را برابر Ψ_1 تعریف کنید و در صورتی که خط آمد Ψ را برابر Ψ_2 تعریف کنید (در صورت لزوم فضای احتمال را گسترش می‌دهیم). در این صورت $\lambda_\Psi = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ و توزیع پالم Ψ برابر است با

$$\mathbb{P}_\Psi = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \mathbb{P}_{\Psi_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \mathbb{P}_{\Psi_2}.$$

نکته ۲۱.۲ را نیز ببینید.

مثال ۱۰.۱. اگر Ψ یک اندازه تصادفی پایا روی گروه توپولوژیک فشردۀ G باشد، می‌توانیم اندازه پالم Ψ را با قرار دادن $G := B$ در تعریف ۷.۱ به دست آوریم. به ویژه، در حالتی که $\Psi(G)$ مقدار ثابتی باشد (که همان λ_Ψ خواهد بود)؛ مثلاً وقتی که Ψ ارگودیک باشد؛ اندازه پالم تعبیر ساده‌ای دارد:

^{۲۲}Palm version

با دانستن Ψ ، کافی است یک نقطه تصادفی با توزیع Ψ از G انتخاب کنیم و با یک انتقال آن را به مبدأ منتقل کنیم تا یک نسخه پالم Ψ به دست آید.

در حالتی که تعداد نقاط ثابت نباشد، با اعمال فوق نسخه پالم اصلاح شده^{۲۳} Ψ (تعریف ۲۲.۲) به دست خواهد آمد. گزاره ۱۱.۱ (فرمول کمپبل^{۲۴}). فرض کنید Ψ یک اندازه تصادفی پایا با شدت λ_Ψ باشد. در این صورت برای هر تابع اندازه پذیر و نامنفی $H : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ داریم

$$\lambda_\Psi \mathbb{E}_\Psi \left[\int_{\mathbb{R}^d} H(\theta_s, s) ds \right] = \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^d} H(\theta_s, s) \Psi(ds) \right]. \quad (۲.۱)$$

اثبات. در صورتی که H تابع مشخصه مجموعه $A \times B$ باشد، که $A \in \mathcal{F}$ و $B \in \mathcal{B}$ ، ادعای مسئله همان تعریف ۷.۱ است. در این حالت خاص، طرفین (۲.۱) نسبت به هر یک از A و B جمعی است و حکم کلی نتیجه می شود. $\square$

۴.۱ خواص ارگودیک

فرض کنید $\mathbb{P}$ یک اندازه احتمال پایا روی Ω باشد. طبق تعریف پایایی، عمل گروه $\mathbb{R}^d$ روی $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک عمل حافظ اندازه است. بنابراین از تعاریف و قضایای نظریه سیستم های دینامیکی و نظریه ارگودیک می توان استفاده کرد. در حالت یک بعدی، اعداد حقیقی را می توان به عنوان زمان تعبیر کرد و $\theta_t \omega$ را مکان ω بعد از گذشت زمان t در نظر گرفت. در حالت کلی تر، از نظریه ارگودیک چند متغیره استفاده خواهیم کرد.

اندازه احتمال پایای $\mathbb{P}$ روی Ω را ارگودیک^{۲۵} می نامند هرگاه برای هر پیشامد $A \in \mathcal{F}$ که تحت همه θ_s ها (به ازای $s \in \mathbb{R}^d$) ناوردا باشد، داشته باشیم $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$. اندازه تصادفی $(\mathbb{P}, \Psi)$ را ارگودیک می نامیم هرگاه Ψ پایا و $\mathbb{P}$ ارگودیک باشد. توجه کنید که ارگودیک بودن تنها به $\mathbb{P}$ وابسته است و تنها چیزی که از Ψ انتظار می رود همورد بودن آن است. بنابراین اگر Φ اندازه ای باشد که با یک روش غیر تصادفی و ناوردا تحت انتقال از Ψ به دست می آید، آن گاه ارگودیک بودن $(\mathbb{P}, \Psi)$ ارگودیک بودن $(\mathbb{P}, \Phi)$ را نتیجه می دهد.

در حالت یک بعدی، قضیه ارگودیک بیرکف می گوید که میانگین تابع انتگرال پذیر h روی Ω را می توان با میانگین h روی مدار یک نقطه (به ازای تقریباً هر نقطه شروع) به دست آورد؛ یعنی برای تقریباً هر ω ،

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{-t}^t h(\theta_s \omega) ds = \mathbb{E}[h]$$

در حالت چند بعدی، در قضیه زیر می بینیم که به جای بازه زمانی $[-t, t]$ می توان از گوی های بزرگ شونده استفاده کرد. برای اثبات آن، قضیه ۱۴.۱۰ از [۹] را ببینید.

^{۲۳}Modified Palm distribution

^{۲۴}Refined Campbell Formula

^{۲۵}Ergodic

قضیه ۱۲.۱ (قضیه ارگودیک بیرکهف^{۲۶}). فرض کنید $\mathbb{P}$ یک اندازه احتمال پایا باشد و $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع انتگرال پذیر (یعنی یک متغیر تصادفی با میانگین متناهی). برای $\mathbb{P}$ -تقریباً هر ω ، حد زیر وجود دارد

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathcal{L}(B_R(\circ))} \int_{B_R(\circ)} h(\theta_t \omega) dt$$

و برابر است با $\mathbb{E}[h|I]$ که در آن I سیگما-میدان پیشامدهای ناوردا تحت همه θ_s ها است. به طور خاص، اگر $\mathbb{P}$ ارگودیک باشد، حد فوق تقریباً همیشه برابر با $\mathbb{E}[h]$ است.

از این قضیه می‌توان قضیه زیر را نتیجه گرفت. برای اثبات، قضیه ۱۰.۴.۱۳ از [۳] را ببینید.

قضیه ۱۳.۱. فرض کنید Ψ یک اندازه تصادفی ارگودیک با شدت $0 < \lambda < \infty$ باشد و $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع اندازه‌پذیر و نامنفی. در این صورت

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathcal{L}(B_R(\circ))} \int_{B_R(\circ)} h(\theta_t \omega) \Psi(dt) = \lambda \mathbb{E}_{\Psi}[h].$$

قضیه دیگری که در این پایان‌نامه به آن نیاز داریم، قضیه تجزیه ارگودیک است (قضیه ۲۶.۱۰ از [۹]).

قضیه ۱۴.۱ (تجزیه ارگودیک). فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F})$ یک فضای بورل مجهز به شار باشد. اندازه‌های احتمال پایا روی $(\Omega, \mathcal{F})$ یک مجموعه محدب تشکیل می‌دهند. نقاط گوشه‌ای این مجموعه، دقیقاً اندازه‌های ارگودیک هستند. به علاوه، هر اندازه پایا به صورت یکتا به صورت ترکیب محدب اندازه‌های ارگودیک نمایش داده می‌شود؛ یعنی به شکل $\int Q \nu(dQ)$ که در آن ν یک اندازه احتمال روی فضای اندازه‌های احتمال روی $(\Omega, \mathcal{F})$ است که روی مجموعه اندازه‌های ارگودیک متمرکز است.

توجه کنید که در این پایان‌نامه همواره فرض می‌کنیم $(\Omega, \mathcal{F})$ یک فضای بورل است.

نتیجه ۱۵.۱. فرض کنید $A \subseteq \Omega$ پیشامدی باشد که برای هر اندازه احتمال ارگودیک Q داشته باشیم $Q(A) = 1$. در این صورت برای هر اندازه احتمال پایای $\mathbb{P}$ نیز داریم $\mathbb{P}(A) = 1$.

به عنوان یک مثال از چنین پیشامدی، فرض کنید Ψ یک اندازه تصادفی پایا باشد و A این پیشامد باشد که $\Psi(\mathbb{R}^d) \in \{0, \infty\}$ (مثال ۶.۱).

برای استفاده از این قضیه در این پایان‌نامه، نتیجه کلی‌تری را در حالت غیر ارگودیک بیان خواهیم کرد. نتیجه ۲۸.۲ را ببینید.

^{۲۶}Birkhoff's ergodic theorem

۵.۱ انتقال جرم

انتقال جرم^{۲۷} مفهومی است که در زمینه‌های مختلفی استفاده می‌شود. برای این که از تعاریف و نمادگذاری‌های واحدی استفاده کنیم، در این فصل آن را تعریف می‌کنیم و خواص اولیه آن را ثابت می‌کنیم. برای نوشتن این مطالب از [۱۳] به عنوان مرجع اصلی کمک گرفته‌ایم. البته در این پایان‌نامه به مبحث نظریه انتقال بهینه^{۲۸} وارد نخواهیم شد. ابتدا یک تعبیر شهودی از انتقال جرم ارائه می‌کنیم و در بخش ۱.۵.۱ به فرمول بندی مسئله می‌پردازیم. فرض کنید تعدادی معدن و تعدادی کارخانه داریم و می‌خواهیم مواد معدنی را به کارخانه‌ها منتقل کنیم. توجه کنید که مقدار مواد معدنی در معادن لزوماً یکنواخت نیست و نیاز کارخانه‌ها نیز یکنواخت نیست. منظور از یک الگوی انتقال جرم این است که مشخص کنیم چه مقدار جرم از معدن x به کارخانه ξ می‌رود. در حالت پیوسته، مواد معدنی و نیاز کارخانه‌ها با دو توزیع مشخص φ و ψ در صفحه توزیع شده‌اند. اگر $f(x, \xi)$ مشخص کند که چه نسبتی از جرم بی‌نهایت کوچک^{۲۹} حول x به ناحیه بی‌نهایت کوچک حول ξ رفته‌است، آن‌گاه با انتگرال گرفتن می‌توان تعیین کرد چه مقدار جرم از ناحیه A به ناحیه B می‌رود. در ادامه این ایده را به طور دقیق بیان می‌کنیم.

۱.۵.۱ انتقال جرم غیر تصادفی

تعریف ۱.۶.۱. منظور از یک اندازه انتقال^{۳۰} وزن‌دار، یک اندازه q روی $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ است. منظور از یک هسته انتقال^{۳۱} وزن‌دار، تابع اندازه‌پذیر $T: \mathbb{R}^d \rightarrow M(\mathbb{R}^d)$ و منظور از یک چگالی انتقال^{۳۲} وزن‌دار، تابع اندازه‌پذیر و نامنفی $f: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ است.

در تعریف فوق، تعبیر $q(A \times B)$ جرم منتقل شده از A به B است. این تعبیر توجیه می‌کند که چرا q باید یک اندازه باشد، زیرا انتظار داریم نسبت به هر یک از A و B جمعی باشد. همچنین تعبیر $T(x)(B)$ که آن را با $T(x, B)$ نیز نشان می‌دهیم، این است که چه نسبتی از جرم بی‌نهایت کوچک حول x به ناحیه B رفته‌است. بنابراین $T(x, \cdot)$ توزیعی است که مشخص می‌کند جرم خارج شده از x چگونه پخش شده است. تعبیر $f(x, \xi)$ نیز همان طور که در بالا گفتیم این است که چه نسبتی از جرم بی‌نهایت کوچک حول x به ناحیه بی‌نهایت کوچک حول ξ رفته‌است. توجه کنید که فعلاً فرض نمی‌کنیم در این انتقال جرم پایداری جرم وجود دارد؛ یعنی ممکن است جرم به وجود بیاید یا از بین برود. به همین دلیل در مفاهیم تعریف ۱.۶.۱ از کلمه وزن‌دار استفاده شده است. همچنین در تعریف فوق فرض نمی‌کنیم اندازه φ بعد از انتقال جرم واقعاً به اندازه ψ تبدیل می‌شود. این موضوع در تعریف‌های ۱.۷.۱ و ۱.۸.۱ بررسی می‌شود.

^{۲۷}Mass transport

^{۲۸}Optimal transport theory

^{۲۹}Infinitesimal

^{۳۰}Transport measure

^{۳۱}Transport kernel

^{۳۲}Transport density

تعریف ۱۷.۱. فرض کنید φ و ψ دو اندازه داده شده روی $\mathbb{R}^d$ باشند. در تعریف ۱۶.۱، q ، T و f را بدون وزن^{۳۳} (نسبت به φ و ψ) می‌نامیم هرگاه

$$\begin{aligned}(\pi_1)_* q &= \varphi, \\ T(x, \mathbb{R}^d) &= 1, \quad \varphi - \text{a.s.}, \\ \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \xi) d\psi(\xi) &= 1, \quad \varphi - \text{a.s.}.\end{aligned}$$

تعریف ۱۸.۱. تحت شرایط تعریف ۱۷.۱، q ، T و f را انتقال جرم بین φ و ψ و یا (φ, ψ) -موازنه‌گر^{۳۴} می‌نامیم هرگاه یک انتقال جرم بدون وزن باشند و هم‌چنین φ را به ψ تبدیل کند؛ یعنی

$$\begin{aligned}(\pi_2)_* q &= \psi, \\ \int_{\mathbb{R}^d} T(x, B) d\varphi(x) &= \psi(B), \quad \forall B \in \mathcal{B}, \\ \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \xi) d\varphi(x) &= 1, \quad \psi - \text{a.s.}.\end{aligned}$$

موازنه‌گر بودن به این معنی است که جرم خارج شده از یک مجموعه $A \subseteq \mathbb{R}^d$ برابر است با $\varphi(A)$ و جرم وارد شده به یک مجموعه $B \subseteq \mathbb{R}^d$ برابر است با $\psi(B)$. یک هسته انتقال بدون وزن در واقع یک هسته مارکوف است. هم‌چنین اگر φ را به عنوان توزیع لحظه شروع این فرآیند مارکوف در نظر بگیریم (در حالتی که φ اندازه احتمال باشد)، با فرض این که هسته انتقال مذکور (φ, ψ) -موازنه‌گر باشد، توزیع فرآیند در لحظه بعد ψ خواهد بود. در حالت کلی فرض نمی‌کنیم که یک انتقال جرم لزوماً (φ, ψ) -موازنه‌گر است. اگر q یک اندازه انتقال باشد، $q(A \times \mathbb{R}^d)$ به عنوان جرم خارج شده از A تعبیر می‌شود که در حالت وزن‌دار لزوماً برابر با $\varphi(A)$ نیست. هم‌چنین $T(x, \mathbb{R}^d)$ و $\int_{\mathbb{R}^d} f(x, \xi) d\varphi(x)$ را به عنوان جرم خارج شده از x تعبیر می‌کنیم که در حالت وزن‌دار لزوماً برابر با ۱ نیست. برابری کمیت‌های مذکور با ۱ به معنی بدون وزن بودن انتقال جرم است.

تعریف ۱۹.۱. یک تخصیص^{۳۵} موازنه‌گر برای φ و ψ ، یک هسته انتقال T است به طوری که برای φ -تقریباً هر s ، $T(s, \cdot)$ یک اندازه دیراک به شکل $\delta_{\tau(s)}$ باشد و $\varphi(\tau^{-1}(\cdot)) = \psi(\cdot)$. برای تعریف دقیق یک تخصیص در حالت کلی، تعریف ۱۰.۵ را ببینید.

تعبیر تعریف فوق این است که جرم بی‌نهایت کوچک حول x تنها به یک نقطه منتقل شود. تخصیص‌ها حالت خاصی هستند که از اهمیت زیادی برخوردارند. در نظریه انتقال جرم بهینه، به یک تخصیص موازنه‌گر نگاهت انتقال^{۳۶} می‌گویند. در واقع، مسئله بنیادی انتقال جرم بهینه، یافتن تخصیص موازنه‌گر بهینه است. مانج^{۳۷} و

^{۳۳}Non-weighted

^{۳۴}Balancing

^{۳۵}Allocation

^{۳۶}Transport map

^{۳۷}Monge

کانترویچ^{۳۸} برای حل این مسئله از هسته‌های انتقال موازنه‌گر^{۳۹} کمک گرفتند و تحت شرایطی نشان دادند که هسته انتقال موازنه‌گر بهینه وجود دارد و در واقع یک تخصیص است. در این پایان‌نامه به مسئله بهینه بودن به این تعبیر کاری نداریم.

تعریف زیر ارتباط بین تعاریف انتقال جرم در تعریف ۱۶.۱ را مشخص می‌کند.

تعریف ۲۰.۱. فرض کنید φ و ψ دو اندازه روی $\mathbb{R}^d$ باشند. برای چگالی انتقال وزن دار f ، هسته انتقال وزن دار متناظر با f به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$T(x, B) := \int_B f(x, \xi) \psi(d\xi), \forall x \in \mathbb{R}^d, B \in \mathcal{B}.$$

هم چنین برای هسته انتقال وزن دار داده شده T ، اندازه انتقال وزن دار متناظر با T اندازه‌ای مثل q است که

$$q(A \times B) = \int_A T(x, B) d\varphi(x), \forall A, B \in \mathcal{B}.$$

به طور مشابه، برای چگالی انتقال وزن دار f ، اندازه انتقال وزن دار متناظر با f اندازه‌ای است که

$$q(A \times B) = \int_A \int_B f(x, \xi) \psi(d\xi) \varphi(dx), \forall A, B \in \mathcal{B}.$$

می‌توان دید تعریف‌های ۱۷.۱ و ۱۸.۱ با تناظر موجود در تعریف ۲۰.۱ سازگار هستند. گزاره زیر عکس این تناظر را با شرایطی بیان می‌کند. در این گزاره، منظور از μ -یکتایی (که μ یک اندازه است) این است که هر دو شیء که خاصیت مورد نظر را داشته باشند، μ -تقریباً همه‌جا با هم برابرند.

گزاره ۲۱.۱. فرض کنید φ و ψ دو اندازه روی $\mathbb{R}^d$ باشند. اگر اندازه انتقال وزن دار q نسبت به $\varphi \otimes \psi$ به طور مطلق پیوسته باشد، آنگاه چگالی انتقال وزن دار $(\varphi \otimes \psi)$ -یکتایی به q متناظر می‌شود که برابر است با

$$f(x, \xi) := \frac{dq}{d(\varphi \otimes \psi)}(x, \xi).$$

هم چنین برای هسته انتقال وزن دار T ، اگر برای φ -تقریباً هر x ، اندازه $T(x, \cdot)$ نسبت به ψ به طور مطلق پیوسته باشد، آنگاه چگالی انتقال وزن دار $(\varphi \otimes \psi)$ -یکتایی وجود دارد به طوری که برای φ -تقریباً هر x ، $f(x, \cdot)$ نسخه‌ای از مشتق رادون-نیکودایم $T(x, \cdot)$ نسبت به ψ باشد. در نهایت اگر q یک اندازه انتقال وزن دار باشد که $(\pi_1)_* q$ نسبت به φ مطلقاً پیوسته باشد (که در آن $\pi_1 : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ تابع تصویر روی مؤلفه اول است)، آنگاه هسته انتقال وزن دار φ -یکتایی به q نسبت داده می‌شود. هم چنین، با تقریب یکتایی‌های ذکر شده تناظرهای مذکور عکس تناظرهای موجود در تعریف ۲۰.۱ هستند.

^{۳۸}Kantorovich

^{۳۹}Relaxed transport

اثبات این گزاره مقدماتی است و از ذکر کامل آن خودداری می‌کنیم. برای اثبات قسمت دوم، می‌توانیم ابتدا اندازه انتقال متناظر با T را در نظر بگیریم و سپس چگالی انتقال متناظر با آن اندازه انتقال. قسمت سوم نیز نتیجه‌ای از قضیه تجزیه اندازه است ([۱۰]، قضیه ۵.۳).

قضیه تجزیه اندازه همین خاصیت را وقتی که q یک اندازه احتمال است و $\varphi = (\pi_1)_* q$ بیان می‌کند، با این خاصیت اضافه که $T(x, \cdot)$ هم φ -تقریباً همه‌جا یک اندازه احتمال خواهد بود. به بیان دیگر، در این حالت $T(x, B)$ همان احتمال پیشامد $\{\xi \in B\}$ به شرط x خواهد بود.

۲.۵.۱ انتقال جرم تصادفی

مشابه تعریف ۱۶.۱، منظور از یک اندازه انتقال وزن دار تصادفی، هسته انتقال وزن دار تصادفی و چگالی انتقال وزن دار تصادفی، به ترتیب تابعی اندازه‌پذیر مانند $Q : \Omega \rightarrow M(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ ، $T : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow M$ و $F : \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ است. کمیت‌های $Q(\omega)(B)$ ، $T(\omega, x)(B)$ و $F(\omega, x, \xi)$ را با $Q_\omega(B)$ ، $T_\omega(x, B)$ و $F_\omega(x, \xi)$ نیز نشان می‌دهیم. در صورتی که منظور معلوم باشد، گاهی صفت "تصادفی" را به کار نمی‌بریم و از اندیس ω استفاده نمی‌کنیم.

قرارداد ۲۲.۱. در حالت تصادفی، هرگاه از یک انتقال جرم موازنه‌گر (یا به طور مشابه بدون وزن) صحبت می‌کنیم، منظور این است که تقریباً همیشه موازنه‌گر (یا به طور مشابه بدون وزن) است.

می‌توان تناظرهای تعریف ۲۰.۱ را به همان صورت برای حالت تصادفی و همچنین حالت تصادفی و پایا تعمیم داد. این تناظرها با مفهوم هم‌ورد بودن نیز سازگار هستند. مشابه گزاره ۲۱.۱ گزاره زیر نیز برقرار است.

گزاره ۲۳.۱. فرض کنید Φ و Ψ دو اندازه تصادفی پایا باشند. اگر Q یک اندازه انتقال وزن دار هم‌ورد باشد که تقریباً همیشه نسبت به $\Phi \otimes \Psi$ به طور مطلق پیوسته باشد، آنگاه یک چگالی انتقال وزن دار هم‌ورد و یک هسته انتقال وزن دار هم‌ورد متناظر با Q وجود دارد. همچنین اگر T یک هسته انتقال وزن دار هم‌ورد باشد که تقریباً همیشه نسبت به Ψ به طور مطلق پیوسته باشد، آنگاه یک چگالی انتقال وزن دار هم‌ورد متناظر با T وجود دارد.

اثبات. برای قسمت اول، اندازه زیر را روی $\Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ در نظر بگیرید.

$$\hat{Q}(A \times B \times C) := \int_A Q_\omega(B \times C) d\mathbb{P}(\omega).$$

این اندازه هم‌ورد است و نسبت به اندازه هم‌ورد $\widehat{\Phi \otimes \Psi}$ که به طور مشابه تعریف می‌شود به طور مطلق پیوسته است. بنابراین طبق قضیه ۵.۳ از [۱۰] تابع هم‌ورد F روی $\Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ وجود دارد که نسخه‌ای از مشتق رادون-نیکودایم $\hat{Q}$ نسبت به $\widehat{\Phi \otimes \Psi}$ است. این همان چگالی انتقال وزن دار هم‌ورد مطلوب است. سایر قسمت‌های گزاره، از قسمت اول و تناظرهای تعریف ۱۶.۱ نتیجه می‌شوند. $\square$

تعریف ۲۴.۱. برای هسته انتقال وزن دار T ، $\theta_s T$ را انتقال یافته T با بردار s تعریف می‌کنیم؛ یعنی

$$(\theta_s T)(x, B) := T(x + s, B + s).$$

طبق تعاریف بخش ۱.۲.۱، هسته انتقال وزن دار تصادفی T همورد است هرگاه $\theta_s T = T \circ \theta_s$ ؛ یعنی

$$T_{\theta_s \omega}(x - s, B - s) = T_\omega(x, B).$$

مثال ۲۵.۱. فرض کنید $k : \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع نامنفی اندازه‌پذیر و همورد باشد. اگر Ψ یک اندازه تصادفی پایا باشد، آنگاه هسته انتقال وزن دار زیر همورد است.

$$T(x, B) := \int_B k(x, \xi) \Psi(d\xi).$$

این نوع هسته‌های انتقال در کاربردهای اصل انتقال جرم (نتیجه ۳۳.۱) به کرات استفاده می‌شوند.

نکته ۲۶.۱. طبق نکته ۳.۱، یک هسته انتقال وزن دار همورد با اثر آن روی مبدأ به طور یکتا مشخص می‌شود. یعنی اگر تابع اندازه‌پذیر $k : \Omega \rightarrow M$ داده شده باشد، هسته انتقال وزن دار همورد یکتای T وجود دارد که $k(\omega, B) = T_\omega(o, B)$ و به این صورت داده می‌شود

$$T_\omega(x, B) := k(\theta_x \omega, B - s).$$

به طور خاص، اگر $\tau_o : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ یک بردار تصادفی باشد، تخصیص همورد یکتایی وجود دارد که $T_\omega(o) = \delta_{\tau_o(\omega)}$ و به صورت $T_\omega(x) := \delta_{x + \tau_o(\theta_x \omega)}$ داده می‌شود. همچنین اگر $g : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی اندازه‌پذیر و نامنفی باشد، چگالی انتقال وزن دار همورد یکتای F وجود دارد که $g(\omega, \xi) = F(\omega, o, \xi)$ و به صورت زیر داده می‌شود.

$$F(\omega, x, \xi) := g(\theta_s \omega, \xi - s).$$

به راحتی دیده می‌شود که اگر Φ یک اندازه تصادفی پایا و T یک هسته انتقال وزن دار همورد باشد، آنگاه اندازه $\Psi(B) := \int_{\mathbb{R}^d} T(x, B) \Phi(dx)$ نیز یک اندازه تصادفی پایا است.

۶.۱ اصل انتقال جرم

در بخش قبل تعبیری از انتقال جرم و جرم خارج شده از یک مجموعه ارائه کردیم. در حالتی که اندازه‌های φ و ψ متناهی باشند، یک قانون ساده وجود دارد: جرم خارج شده از کل فضا با جرم وارد شده به کل فضا برابر است. اگر q اندازه انتقال وزن دار متناظر با یک چگالی انتقال وزن دار مثل f باشد، دو کمیت فوق برابرند با

$$q(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \xi) \varphi(dx) \psi(d\xi).$$

اما در حالتی که φ یا ψ اندازه‌هایی نامتناهی باشند، جرم خارج شده از کل فضا می‌تواند بینهایت باشد و قانون فوق رابطه مفیدی به دست نمی‌دهد. با این حال، در حالتی که با دو اندازه تصادفی پایا سر و کار داشته باشیم، می‌توانیم امید ریاضی انتگرال یک کمیت روی کل فضا را با امید ریاضی همان کمیت برای نقطه نمونه (که تعبیری از میانگین روی کل فضا است) جایگزین کنیم. به این ترتیب اتحاد دیگری به دست می‌آید که آن را اصل انتقال جرم می‌نامند و در ادامه آن را معرفی می‌کنیم. هم‌چنین صورت‌هایی از اصل انتقال جرم در مباحث دیگری از ریاضیات نیز به کار گرفته می‌شوند. برای مثال، گراف‌های تصادفی تک‌پیمانه‌ای^{۴۰} گراف‌هایی تصادفی هستند که در آن‌ها صورتی از اصل انتقال جرم برقرار است (به [۱] مراجعه کنید).

تعریف ۲۷.۱. فرض کنید φ و ψ دو اندازه و T یک هسته انتقال وزن دار باشد. هسته انتقال وزن دار T^* را دوگان^{۴۱} T می‌نامیم هرگاه اندازه‌های انتقال وزن دار q و q^* متناظر با آن‌ها دوگان یکدیگر باشند؛ یعنی برای هر دو مجموعه بول A و B در رابطه $q^*(A \times B) = q(B \times A)$ صدق کنند. به عبارت دیگر

$$\int_A T(x, B) \varphi(dx) = \int_B T^*(\xi, A) \psi(d\xi).$$

در تعریف فوق $q^*(A \times B)$ به معنی جرم وارد شده به A از B است و بنابراین تعبیر $T^*(\xi, A)$ به معنی جرم وارد شده به A از ξ است. با توجه به این که دو طرف رابطه فوق نسبت به هر یک از A و B جمعی هستند، برای هر تابع اندازه پذیر $h: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ خواهیم داشت

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} h(x, \xi) T(x, d\xi) \varphi(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} h(x, \xi) T^*(\xi, dx) \psi(d\xi).$$

نکته ۲۸.۱. در صورتی که T متناظر با چگالی انتقال وزن دار $f = f(x, \xi)$ باشد، آنگاه دوگان T وجود دارد. به عنوان مثال هسته انتقال وزن دار متناظر با چگالی انتقال وزن دار $f^*(x, \xi) := f(\xi, x)$ دوگان T است.

نکته ۲۹.۱. در تعریف ۲۷.۱، T بدون وزن است اگر و تنها اگر T^* ، ψ را به φ تبدیل کند. هم‌چنین T ، φ را به ψ تبدیل می‌کند اگر و تنها اگر T^* بدون وزن باشد.

لم ۳۰.۱. اگر T یک هسته انتقال (φ, ψ) -موازنه‌گر باشد، آنگاه هسته انتقال ψ -یکتای T^* وجود دارد که دوگان T باشد و T^* نیز (ψ, φ) -موازنه‌گر خواهد بود. هم‌چنین اگر Φ و Ψ پایا باشند و T یک هسته انتقال تصادفی هم‌ورد باشد که تقریباً همیشه (Φ, Ψ) -موازنه‌گر است، T^* را نیز می‌توان هم‌ورد انتخاب کرد.

این لم نتیجه مستقیم گزاره‌های ۲۱.۱ و ۲۳.۱ است. قضیه زیر ([۱۳]) صورتی از اصل انتقال جرم را بیان می‌کند، هرچند صورت ساده آن (نتیجه ۳۳.۱) نیز بسیار کاربردی است.

^{۴۰} Unimodular random graph

^{۴۱} Dual

قضیه ۳۱.۱ (اصل انتقال جرم^{۴۲}، صورت کلی). فرض کنید Φ و Ψ دو اندازه تصادفی پایا باشند و T و T^* دو هسته انتقال وزن دار هم‌ورد باشند که دوگان یکدیگرند. در این صورت برای هر تابع اندازه‌پذیر نامنفی $h : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ داریم

$$\lambda_\Phi \mathbb{E}_\Phi \left[\int h(\xi) T(\circ, d\xi) \right] = \lambda_\Psi \mathbb{E}_\Psi \left[\int (\theta_x h)(\circ) T^*(\circ, dx) \right].$$

توجه کنید که در رابطه فوق برای راحتی از نوشتن اندیس ω برای T و h صرف نظر کرده‌ایم. اگر نماد $h(\theta_t, s)$ را به عنوان یک متغیر تصادفی در نظر بگیریم که به ازای ω مقدار آن برابر با $h(\theta_t \omega, s)$ است، رابطه فوق را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\lambda_\Phi \mathbb{E}_\Phi \left[\int h(\theta_\circ, \xi) T(\circ, d\xi) \right] = \lambda_\Psi \mathbb{E}_\Psi \left[\int h(\theta_x, -x) T^*(\circ, dx) \right].$$

در واقع، اگر در تعریف هسته انتقال، اندازه‌های علامت‌دار هم مجاز باشند، آنگاه با در نظر گرفتن هسته انتقال وزن دار هم‌ورد $T'(x, d\xi) := h(\theta_x, \xi - x) T(x, d\xi)$ (نکته ۲۶.۱ را ببینید) رابطه فوق معادل است با

$$\lambda_\Phi \mathbb{E}_\Phi \left[\int T'(\circ, dt) \right] = \lambda_\Psi \mathbb{E}_\Psi \left[\int T'^*(\circ, dt) \right].$$

این رابطه برابری متوسط جرم خارج شده از یک نقطه نمونه با متوسط جرم وارد شده به یک نقطه نمونه (بعد از ضرب در شدت) را بیان می‌کند. معادلاً، متوسط جرم خارج شده از یک مجموعه بول B با متوسط جرم وارد شده به B برابر است. در اینجا با ایده‌ای مشابه [۸] اثبات را به روش ساده‌تری نسبت به [۱۳] بازنویسی می‌کنیم (برای دیدن اثبات در گروه‌های غیر از $\mathbb{R}^d$ ، [۱۳] را ببینید که از فرمول کمپبل در گزاره ۱۱.۱ استفاده می‌کند).

اثبات قضیه ۳۱.۱. برای $Q_u, u \in \mathbb{Z}^d$ را مکعب $u + [\circ, 1)^d$ بگیرید. $m(u, v)$ را برابر با امید ریاضی جرم منتقل شده از Q_u به Q_v با انتقال جرم $T'(x, d\xi) := h(\theta_x, \xi - x) T(x, d\xi)$ تعریف کنید؛ یعنی

$$m(u, v) := \mathbb{E} \left[\int_{Q_u} \int_{Q_v} h(\theta_x, \xi - x) T(x, d\xi) \Phi(dx) \right].$$

از تعریف T^* در تعریف ۲۷.۱ نتیجه می‌گیریم

$$m(u, v) = \mathbb{E} \left[\int_{Q_u} \int_{Q_v} h(\theta_x, \xi - x) T^*(\xi, dx) \Psi(d\xi) \right].$$

طبق هم‌ورد بودن این انتقال جرم، داریم $m(\circ, v) = m(-v, \circ)$. بنابراین

$$\sum_{v \in \mathbb{Z}^d} m(\circ, v) = \sum_{v \in \mathbb{Z}^d} m(-v, \circ) = \sum_{v \in \mathbb{Z}^d} m(v, \circ).$$

^{۴۲}Mass transport principle

با جایگذاری تعریف m ، از همورد بودن T و تغییر متغیر $x \leftarrow \xi - \xi$ در عبارت سمت چپ، به دست می‌آوریم

$$\mathbb{E} \left[\int_{B_\circ} \int_{\mathbb{R}^d} h(\theta_x, \xi) T_{\theta_x}(\circ, d\xi) \Phi(dx) \right] = \mathbb{E} \left[\int_{B_\circ} \int_{\mathbb{R}^d} h(\theta_x \theta_\xi, -x) T_{\theta_\xi}^*(\circ, dx) \Psi(d\xi) \right].$$

□

حال تساوی مطلوب از تعریف اندازه پالم نتیجه می‌شود.

نتیجه ۳۲.۱ (صورت دیگر اصل انتقال جرم). با فرض‌های قضیه ۳۱.۱، اگر $F : \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع نامنفی اندازه‌پذیر و همورد باشد، آنگاه

$$\lambda_\Phi \mathbb{E}_\Phi \left[\int F(\circ, \xi) T(\circ, d\xi) \right] = \lambda_\Psi \mathbb{E}_\Psi \left[\int F(x, \circ) T^*(\circ, dx) \right].$$

به طور خاص، با جایگذاری $T(x) = \Psi$ و $T^*(x) = \Phi$ نتیجه زیر را به دست می‌آوریم.

نتیجه ۳۳.۱ (حالت ساده اصل انتقال جرم). با فرض‌های نتیجه ۳۲.۱ داریم

$$\lambda_\Phi \mathbb{E}_\Phi \left[\int F(\circ, \xi) \Psi(d\xi) \right] = \lambda_\Psi \mathbb{E}_\Psi \left[\int F(x, \circ) \Phi(dx) \right]. \quad (۳.۱)$$

این رابطه را می‌توان این طور تعبیر کرد (به طور نه چندان دقیق) که اگر جرم بی‌نهایت کوچکی که از نقطه x به نقطه ξ می‌رود $F(x, \xi)$ باشد و F همورد باشد، متوسط جرم خارج شده از یک نقطه نمونه Φ ضرب در شدت Φ با متوسط جرم وارد شده به یک نقطه نمونه Ψ ضرب در شدت Ψ برابر است.

رابطه (۳.۱) بیان ساده‌تری از فرمول جابجایی نوو^{۴۳} است. اگر به علاوه داشته باشیم $\Phi = \Psi$ ، این رابطه همان فرمول مکه^{۴۴} است. برای جزئیات بیشتر [۱۳] را ببینید.

صورت (۳.۱) از اصل انتقال جرم کاربردهای وسیعی دارد و اثبات برخی قضیه‌ها را ساده‌تر می‌کند. برای مثال، گزاره زیر را با این فرمول ثابت می‌کنیم.

گزاره ۳۴.۱. فرض کنید Ψ یک فرآیند نقطه‌ای پایا با شدت λ_Ψ باشد و $V \in \mathbb{R}$. فرض کنید یک کاشی‌کاری تصادفی^{۴۵} همورد داشته باشیم که به هر نقطه Ψ یک کاشی با حجم V نسبت می‌دهد. در این صورت $V = \frac{1}{\lambda_\Psi}$.

اثبات. برای $x \in \mathbb{R}^d$ ، نقطه‌ای از Ψ که کاشی متناظر با آن شامل x است را $\tau(x)$ بنامید. از x به $\tau(x)$ جرم واحد بفرستید؛ یعنی تعریف کنید $F(x, y) := \mathbf{1}_{\{y=\tau(x)\}}$. F یک تابع همورد است. حال Φ را اندازه لبگ می‌گیریم و از اصل انتقال جرم (نتیجه ۳۳.۱) استفاده می‌کنیم. طرف چپ (۳.۱) در اینجا برابر با ۱ است و طرف راست برابر است با $\lambda_\Psi V$. پس حکم ثابت می‌شود.

□

^{۴۳}Neveu's exchange formula

^{۴۴}Mecke

^{۴۵}Random tessellation

فصل ۲

تاریخچه جفت سازی انتقالی و یافتن نقطه اضافه

در این فصل تاریخچه و نتایج مربوط به جفت سازی انتقالی را از منابع مختلف گردآوری می کنیم. سعی شده است چالش مطالب و توضیحات اضافه نویسنده، طوری تنظیم شود که تاریخچه به طور جامعی ارائه شود، ایده های پشت صحنه نشان داده شود و مطالب مورد نیاز این پایان نامه نیز تأمین گردد.

۱.۲ بازسازی یک اندازه تصادفی از روی نسخه پالم آن

در بخش ۳.۱ دیدیم که چگونه با دانستن توزیع یک اندازه تصادفی می توان توزیع پالم آن را ساخت. سؤالی که به صورت طبیعی پیش می آید این است که آیا توزیع یک فرآیند تصادفی با دانستن توزیع پالم آن به طور یکتا مشخص می شود؟ پاسخ تقریباً مثبت است؛ یعنی توزیع آن فرآیند تصادفی به شرط این پیشامد که اندازه کل فضا مثبت باشد توسط فرمول انعکاس داده می شود (قضیه ۴.۲ در [۱۶] و قضیه ۲.۲ در زیر). قبل از بیان این فرمول، مثال زیر را ببینید.

مثال ۱.۲. در شرایط مثال ۱۰.۱، اگر $\Psi(G)$ ثابت باشد، می توان توزیع Ψ را با دانستن نسخه پالم Ψ به این صورت بازسازی کرد:

کافی است با یک انتقال تصادفی مبدأ مختصات
را به یک نقطه تصادفی یکنواخت از G منتقل کنیم.

ادعای این مثال از فرمول انعکاس (قضیه ۲.۲) نتیجه می شود. در حالت کلی، چون اندازه کل فضا می تواند بی نهایت باشد، یک نقطه تصادفی یکنواخت از کل فضا وجود ندارد و در نتیجه نیاز به روش دیگری داریم.

قضیه ۲.۲ (فرمول انعکاس)^۱. فرض کنید $\tilde{h} : M \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی اندازه پذیر و نامنفی باشد به طوری که برای هر اندازه ناصفر μ داشته باشیم $\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{h}(\mu, s) \mu(ds) = 1$. در این صورت برای هر تابع اندازه پذیر نامنفی

^۱Inversion formula

داریم $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{E} [\mathbf{1}_{\{\Psi(\mathbb{R}^d) > 0\}} f] = \lambda_{\Psi} \mathbb{E}_{\Psi} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{h}(\theta_{-s} \Psi, s) f(\theta_{-s}) ds \right]. \quad (۱.۲)$$

با توجه به نکته ۳.۱ می‌توانیم این فرمول را به شکل ساده تری بنویسیم. اگر $\tilde{H}$ را تابع هم‌ورد تولید شده توسط $\tilde{h}$ بگیریم؛ یعنی $\tilde{h}(\theta_s \Psi, t - s) := \tilde{H}(\Psi, s, t)$ ، آنگاه

$$\mathbb{E} [\mathbf{1}_{\{\Psi(\mathbb{R}^d) > 0\}} f] = \lambda_{\Psi} \mathbb{E}_{\Psi} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{H}(\Psi, s, 0) f(\theta_s) ds \right]. \quad (۲.۲)$$

این فرمول نتیجه مستقیم فرمول کمپل (گزاره ۱۱.۱) است. این فرمول نتیجه مستقیمی از اصل انتقال جرم (نتیجه ۳۲.۱) برای چگالی انتقال $\tilde{H}$ نیز هست.

گزاره ۳.۲. فرمول انعکاس (۱.۲) توزیع Ψ را به شرط پیشامد $\Psi(\mathbb{R}^d) \neq 0$ به طور یکتا با دانستن توزیع نسخه پالم آن مشخص می‌کند.

در اثبات این گزاره از نتیجه ۲۱.۲ که در ادامه خواهیم آورد استفاده می‌کنیم. با توجه به این که از این گزاره هیچ جای دیگری استفاده نمی‌شود، خللی در سایر اثبات‌ها ایجاد نمی‌شود.

اثبات. کافی است نشان دهیم برای تابع اندازه پذیر $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ، $\mathbb{E} [f | \Psi(\mathbb{R}^d) > 0]$ به طور یکتا با دانستن توزیع نسخه پالم Ψ قابل محاسبه است. در [۱۶] یک مثال از تابع $\tilde{h}$ با شرایط قضیه ۲.۲ ساخته شده است. پس طبق فرمول انعکاس (۱.۲)، کافی است نشان دهیم $\lambda_{\Psi} \mathbb{P} [\Psi(\mathbb{R}^d) > 0]$ قابل محاسبه از روی نسخه پالم است. این موضوع از نکته ۲۱.۲ که در ادامه خواهیم آورد نتیجه می‌شود. $\square$

در نکته زیر بیان دیگری از فرمول انعکاس را ارائه می‌دهیم. در واقع، فرمول انعکاس خود اندازه احتمال $\mathbb{P}$ را از روی $\mathbb{P}_{\Psi}$ بازسازی می‌کند، اما در نکته زیر به بازسازی توزیع Ψ اکتفا می‌کنیم.

نکته ۴.۲. برای سادگی فرض کنید تقریباً همیشه $\Psi(\mathbb{R}^d) > 0$. با فرض‌های فوق، فرض کنید Y یک بردار تصادفی باشد که توزیع آن به شرط Ψ (تحت اندازه احتمال $\mathbb{P}_{\Psi}$) برابر با $\mathcal{L}(\Psi, \cdot, 0)$ باشد که $\beta(\Psi)$ یک ضریب نرمال کننده است ($\beta(\Psi)$ کمیتی تصادفی است که به تحقق‌های Ψ بستگی دارد). در این صورت برای هر تابع اندازه پذیر و نامنفی $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ داریم

$$\mathbb{E} [f(\Psi)] = \lambda_{\Psi} \mathbb{E}_{\Psi} [\beta(\Psi) f(\theta_{-Y} \Psi)]. \quad (۳.۲)$$

به عبارت دیگر، اگر $\tilde{\Psi}$ نسخه پالم Ψ باشد، $\theta_{-Y} \tilde{\Psi}$ یک اندازه تصادفی است که مشتق رادون-نیکودایم توزیع آن نسبت به توزیع Ψ برابر است با $\lambda_{\Psi} \beta(\tilde{\Psi})$.

برای شهود بهتر مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۵.۲. در توضیحات فوق، فرض کنید Ψ یک فرآیند نقطه‌ای پایا باشد و $\tilde{H}(\Psi_\omega, s, \cdot)$ به ازای هر s تنها روی یکی از اتم‌های Ψ_ω برابر با ۱ باشد و سایر جاها برابر با ۰؛ یعنی فرض کنید یک تخصیص داریم که نقطه $s \in \mathbb{R}^d$ را به طور هم‌ورد به یکی از نقاط Ψ متناظر می‌کند. این معادل با یک کاشی‌کاری هم‌ورد از فضا است که هر کاشی آن متناظر با یک نقطه از Ψ است. در این صورت نقطه Y که در نکته ۴.۲ معرفی شد، یک نقطه تصادفی یکنواخت از کاشی متناظر با مبدأ مختصات (که تحت اندازه پالم نقطه‌ای از فرآیند است) است و $\beta(\tilde{\Psi})$ حجم این کاشی است. به طور خاص، اگر نقطه $s \in \mathbb{R}^d$ را به نزدیک‌ترین نقطه Ψ به s متناظر کنیم، Y یک نقطه تصادفی یکنواخت از سلول ورونوی متناظر با مبدأ در سلول‌بندی ورونوی برای $\tilde{\Psi}$ خواهد بود و $\beta(\tilde{\Psi})$ حجم این سلول است.

هرچند نشان داده‌ایم که می‌توان با دانستن توزیع پالم Ψ توزیع خود Ψ را به دست آورد، اما هنوز با دانستن یک نمونه از نسخه پالم Ψ نتوانسته‌ایم یک نمونه از توزیع Ψ به دست آوریم ($\theta_Y \tilde{\Psi}$ تحت اندازه پالم نسخه‌ای از Ψ نیست). هم‌چنین به عکس، با دانستن یک نمونه از Ψ هنوز نتوانسته‌ایم یک نمونه از نسخه پالم Ψ به دست بیاوریم. برای این کار اگر بتوانیم $\tilde{H}$ را طوری بسازیم که در فرمول (۳.۲) $\beta(\tilde{\Psi})$ همواره مقدار ثابتی باشد (که مشابه گزاره ۳۴.۱ خواهیم دید حتماً برابر با $\frac{1}{\lambda_\Psi}$ خواهد بود)، در این صورت، نکته ۴.۲ می‌گوید که با دانستن یک نمونه از نسخه پالم Ψ نتوانسته‌ایم یک انتقال تصادفی اعمال کنیم تا یک نمونه از توزیع Ψ را تولید کنیم (قضیه ۱۳.۲ را ببینید. هم‌چنین لازم به ذکر است که در برخی حالات، برآورده کردن هدف فوق ممکن نیست. شرط لازم و کافی در گزاره ۲۰.۲ آورده خواهد شد). به ارتباط این موضوع با مثال ۱.۲ توجه کنید: نیازی نیست یک نقطه تصادفی یکنواخت از کل فضا انتخاب کنیم. به طور مشابه، با فرض این که $\beta(\Psi)$ تقریباً همیشه ثابت است، اگر Y یک بردار تصادفی باشد که توزیع آن به شرط Ψ برابر با $\tilde{H}(\Psi, \cdot, \cdot)$ باشد، آن‌گاه $\theta_Y \Psi$ هم‌توزیع با نسخه پالم Ψ خواهد بود. این موضوع را در تعریف ۶.۲ و قضیه ۱۱.۲ با جزئیات دقیق ارائه می‌کنیم.

تعریف ۶.۲. فرض کنید Ψ یک اندازه تصادفی پایا روی $\mathbb{R}^d$ باشد. منظور از یک الگوی نقطه اضافه^۲ یک بردار تصادفی Y روی $\mathbb{R}^d$ است به طوری که $\theta_Y \Psi$ هم‌توزیع با نسخه پالم Ψ باشد.

توجه کنید که در تعریف فوق، Y می‌تواند روی یک گسترش از فضای نمونه Ω تعریف شده باشد. نام‌گذاری الگوی نقطه اضافه در [۸] به علت زیر پیشنهاد شده است. فرض کنید Ψ یک فرآیند نقطه‌ای برنولی^۳ روی $\mathbb{Z}^d$ باشد؛ یعنی هر نقطه از شبکه $\mathbb{Z}^d$ با پرتاب یک سکه مستقل انتخاب شده است یا خیر (به طور مشابه، یک فرآیند نقطه‌ای پواسون^۴ در $\mathbb{R}^d$). در این صورت طبق قضیه اسلیونیاک-مکه^۵ ([۳] را ببینید)، نسخه پالم Ψ هم‌توزیع با این فرآیند است که یک نقطه به Ψ در مبدأ مختصات اضافه کنیم، در صورتی که قبلاً نقطه‌ای در مبدأ نبوده باشد. پس اگر Y یک الگوی نقطه اضافه برای Ψ باشد، آن‌گاه با انتقال Ψ با بردار $-Y$ (یعنی با در نظر گرفتن $\theta_Y \Psi$) چیزی را به دست می‌آوریم که در حد توزیع همان Ψ است با این تفاوت که یک نقطه به مبدأ مختصات اضافه شده است. پس انگار از ابتدا Y یک نقطه اضافه در Ψ بوده است!

^۲Extra head scheme

^۳Bernoulli point process

^۴Poisson point process

^۵Slivniak-Mecke theorem

وجود الگوی نقطه اضافه تعبیر جالبی دارد. در بخش ۳.۱ این تعبیر را ارائه کردیم که توزیع پالم Ψ از نگاه کردن به Ψ از یک نقطه نمونه Ψ به دست می آید و روشهایی برای تعریف دقیق این موضوع ارائه دادیم. وجود الگوی نقطه اضافه به این معنی است که برای نگاه کردن به Ψ از یک نقطه نمونه آن، کافی است به Ψ از نقطه Y که نقطه ای با توزیع مشخص است نگاه کنیم. برای روشن شدن موضوع، این را با مثال ۱۰.۱ مقایسه کنید.

قضیه زیر وجود الگوی نقطه اضافه را در حالت ارگودیک نشان می دهد. این قضیه از قضیه ۱ در [۱۸] نتیجه می شود. در سال ۱۹۹۵ هرمان توریسون^۶ یک سخنرانی در مورد نتایج مقاله های [۱۸] و [۱۹] ارائه کرد.^۷ یووال پرز^۸ به این مسئله علاقه مند شد که چگونه می توان یک نقطه اضافه در فرآیند پواسون یافت؛ به این معنی که چگونه می توان الگوریتمی ساخت که یک الگوی نقطه اضافه با تعریف فوق ارائه کند. در سال ۲۰۰۴ پرز در یک سخنرانی اولین الگوریتم را برای ساختن الگوی نقطه اضافه برای یک فرآیند نقطه ای ارگودیک در $\mathbb{R}^d$ ارائه داد ([۶]) و همچنین بخش ۳.۳ از همین پایان نامه، که یکی از شاخص ترین کارها در این موضوع است. البته قبل از او در سال ۲۰۰۰ لیگت^۹ یک الگوریتم ساده تر برای فرآیندهای نقطه ای در فضای یک بعدی ارائه داده بود که اولین الگوریتم ساختنی در این موضوع است ([۱۴]). بخش ۲.۳ را ببینید). پس از آن الگوریتم های دیگری نیز با ویژگی های هندسی متفاوت برای فرآیندهای نقطه ای ارائه شده اند. در فصل ۳ بعضی از این روش ها را به صورت مختصر معرفی می کنیم.

قضیه ۷.۲. برای هر اندازه تصادفی ارگودیک ناصفر Ψ روی $\mathbb{R}^d$ یک الگوی نقطه اضافه وجود دارد.

حالت غیر ارگودیک در گزاره ۲۰.۲ بررسی خواهد شد.

□

اثبات. این ادعا نتیجه مستقیم قضیه ۱۱.۲، نکته ۱۲.۲ و قضیه ۱۴.۲ است.

تعریف ۸.۲. فرض کنید Ψ و Φ دو اندازه تصادفی (نه لزوماً پایا) باشند؛ منظور از یک جفت سازی انتقالی^{۱۰} برای Ψ و Φ ، یک جفت سازی برای Ψ و Φ است که تقریباً همیشه انتقالی از یکدیگر باشند. به عبارت دیگر، یک شیء تصادفی مانند (Φ', Ψ', Y) (که ممکن است روی فضای احتمال دیگری تعریف شده باشد) به طوری که Φ' و Ψ' دو اندازه تصادفی هم توزیع با Φ و Ψ هستند و Y یک بردار تصادفی در $\mathbb{R}^d$ است به طوری که

$$\Psi' = \theta_Y \Phi', \quad \text{a.s.}$$

جفت سازی انتقالی در حالت کلی تر با عنوان جفت سازی تحت عمل گروه^{۱۱} نیز شناخته شده است و در [۱۸] معرفی شده است.

^۶Hermann Thorisson

^۷ این پاراگراف بر اساس مکالمات شخصی با هرمان توریسون نوشته شده است.

^۸Yuval Peres

^۹Ligget

^{۱۰}Shift coupling

^{۱۱}Group coupling

نکته ۹.۲. اگر Y یک الگوی نقطه اضافه برای Ψ باشد، طبق تعریف آن $(\Psi, \theta_Y \Psi, Y)$ یک جفت‌سازی انتقالی برای Ψ و نسخه پالم آن است. به عکس، فرض کنید (Ψ', Ψ'', Y') یک جفت‌سازی انتقالی به شکل مذکور باشد. Y را یک بردار تصادفی روی گسترش مناسبی از Ω بگیرید که توزیع آن به شرط Ψ برابر با توزیع Y' به شرط Ψ' باشد. در این صورت Y یک الگوی نقطه اضافه برای Ψ است.

شرط لازم و کافی برای وجود جفت‌سازی انتقالی توسط توریسون در سال ۱۹۹۶ ثابت شده است ([۱۸]). برای این کار کافی است در قضیه زیر $(H, \mathcal{H})$ را همان $(M, \mathcal{M})$ بگیریم. این قضیه حالت خاصی از قضیه ۱ در [۱۸] است. کاربرد این قضیه برای جفت‌سازی انتقالی فرآیندهای نقطه‌ای در [۱۸] بحث شده است.

قضیه ۱۰.۲. فرض کنید $(H, \mathcal{H})$ یک فضای اندازه باشد و $\theta_s(h) \rightarrow (s, h)$ یک عمل اندازه‌پذیر روی H باشد. هم‌چنین فرض کنید X و X' دو عنصر تصادفی در H باشند. دو شرط زیر با هم معادل هستند.

آ. بردار تصادفی Y در $\mathbb{R}^d$ وجود دارد که $\theta_Y X$ هم‌توزیع با X' باشد.

ب. توزیع‌های X و X' روی پیشامدهای ناوردا (تحت همه θ_s ها به ازای $s \in \mathbb{R}^d$) یکسان باشند.

توجه کنید که در قسمت اول، برای وجود Y ممکن است لازم باشد فضای احتمالی که X در آن تعریف شده است گسترش یابد. در این پایان‌نامه اثبات این قضیه را نمی‌آوریم. البته یک طرف این قضیه واضح است: اگر شرط اول برقرار باشد و A یک پیشامد ناوردا باشد، آنگاه پیشامد $X \in A$ با پیشامد $\theta_Y X \in A$ یکسان است و بنابراین نتیجه می‌گیریم احتمال پیشامد $X \in A$ با احتمال پیشامد $X' \in A$ برابر است. اثبات این قضیه در [۱۸] توزیع Y را با دانستن دو نمونه از X و X' به روش ساختنی ارائه نمی‌کند، هرچند Y را با داشتن توزیع X و X' (و نه فقط با داشتن دو نمونه از آن‌ها) می‌سازد.

۲.۲ ارتباط با انتقال جرم

در این بخش نشان می‌دهیم که در حالت پایا، مفاهیم الگوی نقطه اضافه، جفت‌سازی انتقالی و هسته انتقال موازنه‌گر به نحوی با هم متناظر هستند. فرمول (۲.۲) که بیان دیگری از فرمول انعکاس (۱.۲) است، ارتباط الگوی نقطه اضافه با انتقال جرم را نشان می‌دهد. این ارتباط در حالت کلی آن در [۱۳] بحث شده است، اما پیش از آن نیز در حالت فرآیند نقطه‌ای و تخصیص‌های موازنه‌گر در [۸] بحث شده است و اساس الگوریتم‌های ساختن الگوی نقطه اضافه را تشکیل می‌دهد. با توجه به توضیحات پیش از تعریف ۶.۲، دو قضیه زیر را می‌توانیم بیان کنیم. قضیه ۱۱.۲ حالتی از قضیه ۱۰.۴ در [۱۳] است و قضیه ۱۳.۲ نیز نتیجه ساده‌ای از همان قضیه است. توجه کنید که طبق نکته ۹.۲ فرض این دو قضیه معادل با وجود یک جفت‌سازی انتقالی برای Ψ و نسخه پالم آن است. در نهایت، در قضیه ۱۴.۲ وجود جفت‌سازی انتقالی در حالت ارگودیک را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱۱.۲. فرض کنید Ψ یک اندازه تصادفی پایا باشد و Y یک بردار تصادفی در $\mathbb{R}^d$. در این صورت Y یک الگوی نقطه اضافه برای Ψ است اگر و تنها اگر توزیع Y به شرط Ψ برابر باشد با $T(o, \cdot)$ ، که در آن T یک هسته انتقال همورد موازنه‌گر بین $\lambda_\Psi \mathcal{L}$ و Ψ است و تابعی از Ψ است. همچنین برای هر هسته انتقال T با این شرایط، Y را می‌توان به همین شکل ساخت.

اثبات. قرار دهید $\Phi := \lambda_\Psi \mathcal{L}$. ابتدا فرض کنید T موازنه‌گر باشد. با توجه به این که T بدون وزن است و تابعی از Ψ ، Y به عنوان یک بردار تصادفی خوش تعریف خواهد بود. با توجه به این که $\mathbb{P}_\Phi = \mathbb{P}$ ، قضیه ۱۰.۴ از [۱۳] نتیجه می‌دهد که $\mathbb{E}_\Psi[H(\Psi)] = \mathbb{E}[H(\theta_Y \Psi)]$ برای هر تابع اندازه پذیر H روی M . بنابراین $\theta_Y \Psi$ هم توزیع با نسخه پالم Ψ است. به عکس، فرض کنید Y یک الگوی نقطه اضافه باشد. طبق نکته ۲۶.۱ می‌توان هسته انتقال T را ساخت که بدون وزن خواهد بود. همچنین طبق رابطه $\mathbb{E}_\Psi[H(\Psi)] = \mathbb{E}[H(\theta_Y \Psi)]$ ، عکس قضیه ۱۰.۴ در [۱۳] نتیجه می‌دهد که T موازنه‌گر است (به تفاوت تعریف $\mathbb{P}_\Psi$ در اینجا و [۱۳] دقت کنید). $\square$

نکته ۱۲.۲. اگر T یک هسته انتقال موازنه‌گر همورد بین $\lambda_\Psi \mathcal{L}$ و Ψ باشد (اما لزوماً تابعی از Ψ نباشد)، آنگاه می‌توانیم تعریف کنیم

$$T'(s, B) := \mathbb{E}[T(s, B) | \Psi].$$

در این صورت اگر از امید شرطی منظم استفاده کرده باشیم، T' نیز یک هسته انتقال موازنه‌گر همورد است و تابعی از Ψ است. بنابراین طبق قضیه فوق از یک هسته انتقال موازنه‌گر بین $\lambda_\Psi \mathcal{L}$ و Ψ که لزوماً تابعی از Ψ نباشد نیز می‌توان یک الگوی نقطه اضافه ساخت.

قضیه ۱۳.۲. فرض کنید Y یک الگوی نقطه اضافه برای Ψ باشد و T هسته انتقال متناظر با آن (در شرایط قضیه ۱۱.۲). T^* را دوگان T طبق تعریف ۲۷.۱ بگیرید. اگر Z یک بردار تصادفی باشد که توزیع آن به شرط Ψ (تحت اندازه احتمال $\mathbb{P}_\Psi$) برابر باشد با $T^*(o, \cdot)$ ، آنگاه $(\mathbb{P}_\Psi, \theta_Z \Psi)$ یک اندازه تصادفی هم توزیع با Ψ است. به عبارت دیگر، انتقال با بردار تصادفی $-Z$ توزیع Ψ را با دانستن نسخه پالم آن بازسازی می‌کند.

اثبات. قرار دهید $\Phi := \lambda_\Psi \mathcal{L}$. طبق قضیه ۱۱.۲، لم ۳۰.۱ و نکته ۲۹.۱، T^* وجود دارد و یک هسته انتقال بدون وزن و موازنه‌گر برای (Ψ, Φ) است. پس طبق قضیه ۱۰.۴ از [۱۳]، به دست می‌آوریم که برای هر تابع اندازه‌پذیر H روی M داریم $\mathbb{E}_\Psi[H(\theta_Z \Psi)] = \mathbb{E}[H(\Psi)]$ و حکم ثابت می‌شود. $\square$

قضیه ۱۴.۲. فرض کنید Φ و Ψ دو اندازه تصادفی ارگودیک باشند. در این صورت یک هسته انتقال موازنه‌گر همورد بین آن‌ها وجود دارد اگر و تنها اگر Φ و Ψ دارای شدت برابر باشند.

اثبات. حالت کلی‌تر این قضیه را در قضیه ۱۹.۲ ثابت می‌کنیم. در اینجا فقط شرط لازم را ثابت می‌کنیم. فرض کنید T یک هسته انتقال موازنه‌گر همورد باشد. طبق لم ۳۰.۱، هسته انتقال همورد T^* وجود دارد که دوگان T باشد. طبق نتیجه ۲۹.۱، T^* نیز (Ψ, Φ) -موازنه‌گر است. بنابراین از اصل انتقال جرم (نتیجه ۳۲.۱ برای تابع ثابت 1) نتیجه می‌شود که $\lambda_\Phi = \lambda_\Psi$ و ادعا ثابت می‌شود. $\square$

نکته ۱۵.۲. توجه کنید که در حالت غیر تصادفی، به راحتی می‌توان بین هر دو اندازه φ و ψ که اندازه مساوی به $\mathbb{R}^d$ نسبت دهند (حتی اندازه بینهایت) یک هسته انتقال موازنه‌گر ساخت. مشکل وقتی ایجاد می‌شود که بخواهیم این کار را به صورت هم‌ورد انجام دهیم. قضیه ۱۴.۲ می‌گوید که این کار را نمی‌توان به طور هم‌ورد برای تمام اندازه‌های غیر تصادفی انجام داد. هم‌چنین، پایا بودن اندازه‌های Φ و Ψ شرطی اساسی است که ما را قادر به ساختن چنین هسته انتقالی می‌کند.

نکته ۱۶.۲. ارتباط قضیه ۱۴.۲ با جفت‌سازی انتقالی به صورت زیر است. با فرض تحقق شرایط این قضیه، T را هسته انتقال مطلوب بگیرید و Y را مشابه قضیه ۱۱.۲ طوری فرض کنید که توزیع آن به شرط Ψ برابر با $T(o, \cdot)$ باشد. در این صورت انتقال θ_Y اندازه $\mathbb{P}_\Phi$ را به $\mathbb{P}_\Psi$ تبدیل می‌کند و احکام قضیه ۱۴.۲ معادل با وجود جفت‌سازی انتقالی بین $\mathbb{P}_\Psi$ و $\mathbb{P}_\Phi$ هستند. اثبات این موضوع مشابه اثبات قضیه ۱۹.۲ است که در ادامه خواهد آمد.

۳.۲ حالت غیر ارگودیک

در بخش قبل وجود الگوی نقطه اضافه و جفت‌سازی انتقالی را در حالت ارگودیک بررسی کردیم. در این بخش حالت‌های غیر ارگودیک را بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم علاوه بر برابری شدت، برابری شدت نمونه‌ای هم لازم است.

تعریف ۱۷.۲. فرض کنید Ψ یک اندازه تصادفی باشد. شدت نمونه‌ای^{۱۲} Ψ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\lambda_\Psi^{(s)}(\omega) := \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\Psi_\omega(B_R(o))}{\mathcal{L}(B_R(o))}. \quad (4.2)$$

در صورتی که Ψ پایا باشد، حد فوق تقریباً همه‌جا وجود دارد و یک متغیر تصادفی است که تقریباً همیشه برابر است با

$$\lambda_\Psi^{(s)} = \frac{1}{\mathcal{L}(B)} \mathbb{E}[\Psi(B) | I] \quad (5.2)$$

که در آن I سیگما-میدان ناورد تحت همه θ_s ها است و B یک مجموعه بول دلخواه با حجم مثبت و متناهی است. قضیه ارگودیک بیرکف (قضیه ۱۲.۱) برای تابع $h(\omega) := \Phi_\omega(B)$ نتیجه می‌دهد که حد فوق تقریباً همیشه وجود دارد و رابطه (۵.۲) برقرار است (نتیجه ۱۹.۱۰ از [۹] را ببینید).

نکته ۱۸.۲. طبق رابطه (۵.۲) داریم

$$\mathbb{E}[\lambda_\Psi^{(s)}] = \lambda_\Psi.$$

هم‌چنین با توجه به این که $\lambda_\Psi^{(s)}$ تحت انتقال ناورد است، اگر Ψ ارگودیک باشد آنگاه شدت نمونه‌ای غیر تصادفی خواهد بود؛ یعنی تقریباً همیشه $\lambda_\Psi^{(s)} = \lambda_\Psi$.

^{۱۲}Sample intensity

قضیه زیر (قضیه ۱۰۵ در [۱۳]) تعمیم قضیه ۱۴۰۲ در حالت غیر ارگودیک است.

قضیه ۱۹۰۲. فرض کنید Φ و Ψ دو اندازه تصادفی پایا باشند. در این صورت یک هسته انتقال موازنه‌گر هم‌ورد بین آن‌ها وجود دارد اگر و تنها اگر شدت نمونه‌ای آن‌ها تقریباً همیشه با هم برابر باشند.

توجه کنید که در قضیه فوق هسته انتقال مطلوب باید روی همان فضای نمونه تعریف شده باشد.

اثبات. فرض کنید T یک هسته انتقال موازنه‌گر بین Φ و Ψ باشد و A یک پیشامد ناورد. طبق لم ۳۰۰۱ و نکته ۲۹۰۱، هسته انتقال هم‌ورد T^* وجود دارد که دوگان T باشد و (Ψ, Φ) -موازنه‌گر باشد. طبق حالت ساده انتقال جرم (نتیجه ۳۲۰۱) برای تابع $F_\omega(s, t) := \mathbf{1}_A(\omega)$ داریم

$$\lambda_\Phi \mathbb{P}_\Phi[A] = \lambda_\Psi \mathbb{P}_\Psi[A].$$

طبق تعریف اندازه پالم (تعریف ۷۰۱) و ناوردایی A به دست می‌آوریم $\mathbb{E}[\Phi(B)\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[\Psi(B)\mathbf{1}_A]$ (به بیان دیگر، در انتقال جرم $T'_\omega(s, \cdot) := \mathbf{1}_A(\omega)T(s, \cdot)$ متوسط جرم وارد شده به B با متوسط جرم خارج شده از B برابر است). در نتیجه شدت نمونه‌ای Φ و Ψ با هم برابر هستند.

به عکس، فرض کنید شدت‌های نمونه‌ای برابر باشند. در نتیجه $\lambda_\Phi = \lambda_\Psi$ و با عکس محاسبات قسمت قبل به دست می‌آوریم $\mathbb{P}_\Psi$ و $\mathbb{P}_\Phi$ روی پیشامدهای ناوردا با هم برابر هستند. پس طبق قضیه ۱۰۰۲ (قرار می‌دهیم $H := \Omega$)، عضوهای تصادفی δ_1 و δ_2 در Ω و بردار تصادفی Y در $\mathbb{R}^d$ وجود دارند (که روی فضای احتمال دیگری تعریف شده‌اند) به طوری که توزیع δ_1 و δ_2 به ترتیب $\mathbb{P}_\Psi$ و $\mathbb{P}_\Phi$ باشد و تقریباً همیشه $\delta_2 = \theta_Y \delta_1$. قرار دهید که $\tilde{T}(\omega, \cdot)$ یک نسخه منظم از توزیع شرطی Y به شرط $\delta_1 = \omega$ باشد. با توجه به این که توزیع δ_1 و δ_2 را می‌دانیم، به سادگی می‌توان دید که برای هر پیشامد $A \in \mathcal{F}$ داریم

$$\mathbb{P}_\Psi[A] = \mathbb{E}_\Phi \left[\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_A(\theta_s) \tilde{T}(\theta_s, ds) \right].$$

حال T را هسته انتقال هم‌ورد تولید شده توسط $\tilde{T}$ بگیرید؛ یعنی $T_\omega(s, B) := \tilde{T}(\theta_s \omega, B - s)$. با اثباتی مشابه قضیه ۱۱۰۲ (یا با استفاده از عکس قضیه ۱۰۴ در [۱۳]) نتیجه می‌گیریم که T یک هسته (Φ, Ψ) -موازنه‌گر است و حکم ثابت می‌شود. $\square$

به عنوان نتیجه‌ای از قضیه ۱۹۰۲، طبق قضایای ۱۱۰۲ و ۱۳۰۲ گزاره زیر را به دست می‌آوریم.

گزاره ۲۰۰۲. برای یک اندازه تصادفی پایای Ψ ، عبارت‌های زیر با هم معادل هستند.

آ. یک الگوی نقطه اضافه برای Ψ وجود دارد.

ب. می‌توان توزیع Ψ را با یک انتقال تصادفی از توزیع نسخه پالم Ψ بازسازی کرد.

پ. شدت نمونه‌ای Ψ تقریباً همیشه یک مقدار ثابت باشد.

نکته ۲۱.۲. اگر شدت نمونه‌ای Ψ ثابت نباشد، نشان می‌دهیم شدت نمونه‌ای Ψ با شدت نمونه‌ای نسخه پالم Ψ هم‌توزیع نیست (ارتباط آن‌ها را نشان خواهیم داد) و بنابراین نمی‌توان انتظار داشت با یک انتقال Ψ را به نسخه پالم آن تبدیل کرد یا به عکس. ابتدا توجه کنید که وجود حد (۴.۲) یک پیشامد ناوردا تحت انتقال است (کافی است R های گویا را در نظر بگیریم). بنابراین از تعریف اندازه پالم نتیجه می‌شود که شدت نمونه‌ای $\mathbb{P}_\Psi$ - تقریباً همیشه وجود دارد. سپس برای بازه $J \subseteq \mathbb{R}$ ، با توجه به ناوردایی $\lambda_\Psi^{(s)}$ تحت انتقال به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\Psi[\lambda_\Psi^{(s)} \in J] &= \frac{1}{\lambda_\Psi} \mathbb{E} \left[\int_B \mathbf{1}_{\lambda_\Psi^{(s)} \in J} d\Psi \right] = \frac{1}{\lambda_\Psi} \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\lambda_\Psi^{(s)} \in J} \Psi(B) \right] \\ &= \frac{1}{\lambda_\Psi} \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\lambda_\Psi^{(s)} \in J} \Psi(B) \mid I \right] \right] = \frac{1}{\lambda_\Psi} \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\lambda_\Psi^{(s)} \in J} \lambda_\Psi^{(s)} \right]\end{aligned}$$

بنابراین اگر توزیع $\lambda_\Psi^{(s)}$ تحت $\mathbb{P}$ و $\mathbb{P}_\Psi$ را به ترتیب μ و ν بنامیم، آنگاه ν نسخه مقدار-اریب شده μ ^{۱۳} است.

$$\frac{d\nu}{d\mu}(x) = \alpha x$$

که در آن $\alpha = \frac{1}{\lambda_\Psi}$. به عنوان مثال اگر شدت نمونه‌ای Φ دارای چگالی احتمال $f(x)$ باشد، آنگاه شدت نمونه‌ای نسخه پالم Φ دارای چگالی احتمال $\frac{xf(x)}{\lambda_\Psi}$ است. به تعبیر دیگر، در نسخه پالم Φ نمونه‌هایی از Φ که شدت بیشتری دارند با احتمال بیشتری نسبت به Φ ظاهر می‌شوند.

هرچند در حالتی که شدت نمونه‌ای ثابت نباشد الگوی نقطه اضافه وجود ندارد، در حالت غیر ارگودیک می‌توان با یک تغییر کوچک نتیجه مشابهی به دست آورد. برای این کار به یک مثال توجه کنید. فرض کنید Ψ_1 و Ψ_2 دو اندازه تصادفی ارگودیک با شدت λ_1 و λ_2 باشند. اندازه تصادفی Ψ را به این ترتیب بسازید که ابتدا با پرتاب سکه اندیس i را انتخاب کنید و سپس یک نمونه تصادفی از Φ_i مستقل از i در نظر بگیرید. حال اگر Y_1 و Y_2 الگوهای نقطه اضافه برای Φ_1 و Φ_2 باشند، در مورد بردار تصادفی Y_i چه می‌توان گفت؟ در قضیه ۲۵.۲ به این سؤال پاسخ خواهیم داد.

تعریف ۲۲.۲. فرض کنید Ψ یک اندازه تصادفی پایا باشد به طوری که تقریباً همیشه ناصفر باشد (یعنی تقریباً همیشه $0 < \Psi(\mathbb{R}^d)$). اندازه پالم اصلاح شده ^{۱۴} Ψ اندازه‌ای به نام $\mathbb{P}_\Psi^*$ روی Ω است به طوری که

$$\frac{d\mathbb{P}_\Psi^*}{d\mathbb{P}_\Psi} = \frac{\lambda_\Psi}{\lambda_\Psi^{(s)}}.$$

در زیر ثابت می‌کنیم که $\mathbb{P}_\Psi^*$ خوش تعریف است و یک اندازه احتمال است. امید ریاضی نسبت به $\mathbb{P}_\Psi^*$ را با $\mathbb{E}_\Psi^*$ نشان می‌دهیم. اندازه تصادفی $(\mathbb{P}_\Psi^*, \Psi)$ نیز نسخه پالم اصلاح شده Ψ نامیده می‌شود.

^{۱۳}Size-biased

^{۱۴}Modified Palm distribution

گزاره ۲۳.۲. با شرایط تعریف ۲۲.۲، $\mathbb{P}_\Psi^*$ خوش تعریف است و یک اندازه احتمال است.

اثبات. توجه کنید که طبق نکته ۲۱.۲، مخرج عبارت سمت راست تقریباً همیشه (نسبت به $\mathbb{P}_\Psi$) ناصفر است و بنابراین $\mathbb{P}_\Psi^*$ خوش تعریف است. با توجه به این که $\Psi(\mathbb{R}^d)$ تقریباً همیشه مثبت است، طبق (۵.۲) به دست می آوریم که $\lambda_\Psi^{(s)}$ نیز تقریباً همیشه (نسبت به $\mathbb{P}$) مثبت است. تعریف کنید $h := \frac{\lambda_\Psi}{\lambda_\Psi^{(s)}} \mathbf{1}_{\{\lambda_\Psi^{(s)} > 0\}}$ که تقریباً همه جا (هم نسبت به $\mathbb{P}_\Psi$ و هم نسبت به $\mathbb{P}$) تعریف شده است. برای اثبات این که $\mathbb{P}_\Psi^*$ یک اندازه احتمال است، کافی است ثابت کنیم $\mathbb{E}_\Psi[h] = 1$. فرض کنید B یک مجموعه بول دلخواه با حجم مثبت و متناهی باشد. طبق (۱.۱) داریم

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\Psi[h] &= \frac{1}{\lambda_\Psi \mathcal{L}_d(B)} \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^d} h(\theta_s) \mathbf{1}_B(s) \Psi(ds) \right] \\ &= \frac{1}{\lambda_\Psi \mathcal{L}_d(B)} \mathbb{E} [\Psi(B)h].\end{aligned}$$

در تساوی آخر از این که h تحت انتقال ناورد است استفاده کرده ایم. با توجه به این که شدت نمونه ای نسبت به سیگما میدان ناورد اندازه پذیر است، h نیز چنین است و بنابراین

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Psi(B)h] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Psi(B)h | I]] = \mathbb{E}[h \mathbb{E}[\Psi(B) | I]] \\ &= \mathbb{E} \left[h \lambda_\Psi^{(s)} \mathcal{L}_d(B) \right] = \mathbb{E} \left[\lambda_\Psi \mathbf{1}_{\{\lambda_\Psi^{(s)} > 0\}} \mathcal{L}_d(B) \right] \\ &= \lambda_\Psi \mathcal{L}_d(B).\end{aligned}$$

در تساوی آخر از این نکته استفاده کرده ایم که $\mathbb{P}[\lambda_\Psi^{(s)} > 0] = 1$. با ترکیب دو رابطه فوق به دست می آوریم که $\mathbb{E}_\Psi[h] = 1$ و حکم ثابت می شود. $\square$

به راحتی می توان تعابیر دیگر زیر از اندازه پالم اصلاح شده را ارائه کرد. در اینجا از اثبات این گزاره صرف نظر می کنیم.

گزاره ۲۴.۲. اندازه پالم اصلاح شده در خواص زیر صدق می کند.

$$\mathbb{P}_\Psi^*(A) = \lambda_\Psi \mathbb{E}_\Psi \left[\frac{1}{\lambda_\Psi^{(s)}} \mathbf{1}_A \right]. \quad \text{آ.}$$

$$\mathbb{P}_\Psi^*(A) = \frac{1}{\mathcal{L}(B)} \mathbb{E} \left[\frac{1}{\lambda_\Psi^{(s)}} \int_B \mathbf{1}_A(\theta_s) \Psi(ds) \right]. \quad \text{ب.}$$

پ. $\mathbb{P}_\Psi^*(\Psi \in A) = \lim_{R \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\mathbf{1}_A(\theta_Y \Psi)]$ که در آن $A \in \mathcal{M}$ و Y یک بردار تصادفی است که توزیع آن به شرط Ψ مضربی از تحدید Ψ به $B_R(0)$ است (در حالتی که $\Psi(B_R(0)) = 0$) را دلخواه تعریف می کنیم؛ مثلاً $(Y = 0)$. به عبارت دیگر، با دانستن Ψ یک نقطه تصادفی از یک گوی بزرگ را به مبدأ منتقل می کنیم و شعاع گوی را به بینهایت میل می دهیم.

قضیه ۲۵.۲. برای هر اندازه تصادفی پایا (و نه لزوماً ارگودیک) مثل Ψ ، بردار تصادفی Y وجود دارد که $\theta_Y \Psi$ هم توزیع با نسخه پالم اصلاح شده Ψ باشد.

اثبات. اثبات این قضیه مشابه اثبات قضیه ۷.۲ است. اندازه تصادفی $\lambda_{\Psi}^{(s)} := \Phi(\omega)$ را در نظر بگیرید. شدت نمونه‌ای Φ با شدت نمونه‌ای Ψ برابر است. بنابراین طبق قضیه ۱۹.۲ یک هسته انتقال موازنه‌گر هم‌ورد مانند T بین آن‌ها وجود دارد. مشابه نکته ۱۲.۲ می‌توان این هسته انتقال را تابعی از Ψ انتخاب کرد. بردار تصادفی Y را طوری انتخاب می‌کنیم که توزیع آن به شرط Ψ برابر با $T(0, 0)$ باشد (در صورت لزوم فضای نمونه را گسترش می‌دهیم). از تعریف ۱۷.۲، قضیه ۱۰.۴ از [۱۳] و ناوردایی شدت نمونه‌ای تحت انتقال‌های فضا به دست می‌آوریم که برای هر تابع اندازه‌پذیر و نامنفی $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ ،

$$\mathbb{E}_{\Psi}^*[H(\Psi)] = \mathbb{E}_{\Psi} \left[\frac{\lambda_{\Psi}}{\lambda_{\Psi}^{(s)}} H(\Psi) \right] = \mathbb{E}_{\Phi} \left[\frac{\lambda_{\Psi}}{\lambda_{\Psi}^{(s)}} H(\theta_Y \Psi) \right].$$

از طرف دیگر، با جابجایی امید ریاضی و انتگرال در (۱۰.۱) در حالت خاص زیر، نتیجه می‌شود که برای هر تابع اندازه‌پذیر و نامنفی $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ،

$$\mathbb{E}_{\Phi} [h] = \mathbb{E} \left[\frac{\lambda_{\Psi}^{(s)}}{\lambda_{\Psi}} h \right].$$

با ترکیب این دو رابطه به دست می‌آوریم

$$\mathbb{E}_{\Psi}^*[H(\Psi)] = \mathbb{E} [H(\theta_Y \Psi)].$$

□

بنابراین $\theta_Y \Psi$ هم توزیع با نسخه پالم اصلاح شده Ψ است.

در پایان این بخش، برای استفاده بهتر از قضیه تجزیه ارگودیک، به تعمیم نتیجه ۱۵.۱ می‌پردازیم. ابتدا مثال زیر را ببینید.

مثال ۲۶.۲. فرض کنید Ψ_1 و Ψ_2 دو اندازه تصادفی ارگودیک با توزیع‌های $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ باشند. یک سکه پرتاب کنید و در صورتی که شیر آمد Ψ را برابر Ψ_1 تعریف کنید و در صورتی که خط آمد Ψ را برابر Ψ_2 تعریف کنید. Ψ یک اندازه تصادفی پایا خواهد بود که توزیع آن $\frac{1}{2}(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2)$ خواهد بود، اما ارگودیک نیست (مگر این که $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$). اگر برای پیشامد مشخص A بخواهیم ثابت کنیم احتمال $\Psi \in A$ برابر با یک است، کافی است ثابت کنیم $\mathcal{P}_1(A) = \mathcal{P}_2(A) = 1$.

توجه کنید که در مثال ۲۶.۲، در صورتی که سکه شیر آمده باشد، شدت نمونه‌ای Ψ برابر با شدت Ψ_1 است و در صورتی که خط آمده باشد شدت نمونه‌ای Ψ برابر با شدت Ψ_2 است. به طور کلی‌تر، داریم

لم ۲۷.۲. فرض کنید $(\mathbb{P}, \Psi)$ یک اندازه تصادفی پایا باشد. برای هر اندازه ارگودیک Q ، شدت نمونه‌ای $(\mathbb{P}, \Psi)$ ، Q -تقریباً همه‌جا با شدت (Q, Ψ) برابر است.

اثبات. توجه کنید که شدت نمونه‌ای، در صورت وجود فقط به Ψ_ω بستگی دارد و نه به اندازه احتمال. همچنین طبق قضیه ۱۳.۱ شدت (Q, Ψ) تقریباً همه جا (نسبت به Q) با شدت نمونه‌ای Ψ برابر است. $\square$

لم فوق و نتیجه ۱۵.۱ نتیجه می‌دهد که

نتیجه ۲۸.۲. فرض کنید برای دو اندازه تصادفی پایای $(\mathbb{P}, \Phi)$ و $(\mathbb{P}, \Psi)$ که شدت نمونه‌ای آن‌ها تقریباً همیشه (نسبت به $\mathbb{P}$) در رابطه مشخصی صدق می‌کنند، بخواهیم ثابت کنیم که احتمال پیشامد $(\Phi, \Psi) \in A$ برابر با ۱ است. در صورتی که A تحت همه انتقال‌های θ_s ناوردا باشد، برای این کار کافی است فرض کنیم $\mathbb{P}$ ارگودیک است و حکم را با این فرض ثابت کنیم.

فصل ۳

روش‌های موجود برای ساختن الگوی نقطه اضافه

در این فصل چند الگوریتم موجود برای ساختن الگوی نقطه اضافه در حالات خاص را مرور می‌کنیم. به طور خاص، مطالب بخش ۳.۳ انگیزه اصلی تعاریف و نتایج این پایان‌نامه در فصل ۴ خواهد بود. همچنین روش مذکور در بخش ۴.۳ که تعمیمی از روش مذکور در بخش ۲.۳ است، در بخش ۳.۵ تعمیم داده خواهد شد. لازم به ذکر است که منظور ما از الگوریتم به معنای محاسباتی آن نیست، بلکه منظور ارائه فرمول صریح یا دنباله‌ای از توابع است که هر کدام به طور صریح بر حسب تابع قبلی مشخص می‌شود و در حد به تابع مطلوب میل می‌کنند.

۱.۳ الگوی نقطه اضافه غیر تصادفی

تعریف ۱.۳. فرض کنید Ψ یک اندازه تصادفی پایا روی $\mathbb{R}^d$ باشد. منظور از یک الگوی نقطه اضافه غیر تصادفی^۱ برای Ψ ، بردار تصادفی Y است که تقریباً همیشه تابعی از Ψ باشد و $\theta_Y \Psi$ هم‌توزیع با نسخه پالم Ψ باشد.

در تعریف فوق، علت انتخاب نام غیر تصادفی این است که توزیع Y به شرط Ψ غیر تصادفی است؛ یعنی با داشتن یک نمونه از Ψ می‌توان به صورت غیر تصادفی با یک انتقال نمونه‌ای از نسخه پالم Ψ را تولید کرد. قضیه ۱۱.۲ به راحتی نتیجه زیر را نتیجه می‌دهد. حالت فرآیند نقطه‌ای آن در [۸] اثبات شده است.

نتیجه ۲.۳. یک الگوی نقطه اضافه غیر تصادفی برای Ψ معادل با یک تخصیص هم‌ورد $(\lambda_\Psi \mathcal{L}, \Psi)$ -موازنه‌گر است که تابعی از Ψ باشد. برای امکان‌پذیر بودن این موضوع، طبق قضیه ۱۹.۲ لازم است که شدت نمونه‌ای Ψ ثابت باشد (برای مثال Ψ ارگودیک باشد). کافی بودن این شرط مسئله‌ای است که در مسئله باز ۱۵.۵ بیان خواهد شد.

مثال ۳.۳. فرض کنید Ψ یک فرآیند نقطه‌ای پایا باشد. مشابه مثال ۵.۲، یک الگوی نقطه اضافه غیر تصادفی برای Ψ معادل با یک کاشی‌کاری هم‌ورد است که هر کاشی با یک نقطه از Ψ متناظر شده باشد و حجم کاشی‌ها برابر باشند. در این صورت حجم کاشی‌ها نیز برابر با $\frac{1}{\lambda_\Psi}$ خواهند بود.

^۱Non-randomized extra head scheme

۲.۳ حالت فرآیند نقطه‌ای یک بُعدی

در این بخش الگوریتم ارائه شده توسط لیگت ([۱۴]) را ارائه می‌کنیم. همان طور که گفتیم (بعد از تعریف ۶.۲) این الگوریتم اولین روش ساختن یک الگوی نقطه اضافه بوده است. فرض کنید Ψ یک فرآیند نقطه‌ای ساده پایا و ارگودیک روی $\mathbb{Z}$ باشد؛ یعنی Ψ را می‌توانیم یک زیرمجموعه تصادفی از $\mathbb{Z}$ بگیریم که توزیع آن تحت انتقال‌های صحیح ناورد است. شدت Ψ را λ بنامید. به عنوان یک الگوریتم غلط، اولین نقطه Ψ در سمت راست مبدأ را در نظر بگیرید؛ یعنی نقطه تصادفی $Y := \min\{t \geq 0 : t \in \Psi\}$. در حالتی که Ψ از پرتاب سکه‌های مستقل برای هر نقطه $\mathbb{Z}$ ساخته شده باشد (فرآیند برنولی)، Y یک الگوی نقطه اضافه نیست، زیرا $\mathbb{P}(Y - 1 \in \Psi) = \frac{1}{\lambda}$ در صورتی که برای یک الگوی نقطه اضافه این احتمال باید $\frac{1}{\lambda}$ باشد. طبق نتیجه ۲.۳، یک الگوی نقطه اضافه غیر تصادفی معادل با تخصیص هم‌ورد $\tau : \mathbb{Z} \rightarrow \Psi$ است به طوری که تعداد اعضای $\tau^{-1}(x)$ برای هر x برابر با $\frac{1}{\lambda}$ باشد. پس در حالتی که $\frac{1}{\lambda} \notin \mathbb{Z}$ ، الگوی نقطه اضافه غیرتصادفی وجود ندارد. در ادامه حالتی که $\lambda = \frac{1}{l}$ را بررسی می‌کنیم. ابتدا فرض کنید $\lambda = \frac{1}{l}$. با در نظر گرفتن تابع همانی روی Ψ ، کافی است یک تطابق هم‌ورد $\tau : \Psi^c \rightarrow \Psi$ بسازیم. الگوریتم لیگت به این صورت است که به ازای $x \in \Psi^c$ تعریف می‌کنیم

$$\tau(x) := \min\{t \geq x : \#([x, t] \cap \Psi) \geq \#([x, t] \cap \Psi^c)\},$$

که در آن $\#A$ تعداد اعضای مجموعه A است. توجه کنید که در صورتی که مینیمم فوق برابر با بینهایت نباشد، $\tau(x) \in \Psi$ و τ یک به یک است. همچنین در این صورت نقاط بازه $(x, \tau(x))$ به صورت یک به یک و پوشا به یکدیگر متناظر می‌شوند. با استفاده از ارگودیک بودن و اصل انتقال جرم میتوان ثابت کرد که تابع فوق تقریباً همیشه یک تطابق بین Ψ^c و Ψ برقرار می‌کند. با توجه به این که اثبات بسیار مشابه اثبات آورده شده در بخش ۳.۳ است، از تکرار آن خودداری می‌کنیم.

به طور مشابه، برای $\lambda = \frac{1}{l}$ می‌توانیم تعریف کنیم

$$\tau(x) := \min\{t \geq x : \#([x, t] \cap \Psi) \geq \frac{1}{l} \#([x, t] \cap \mathbb{Z})\}.$$

همچنین لیگت همین ایده را برای ساختن یک الگوی نقطه اضافه غیر تصادفی برای یک فرآیند تصادفی ارگودیک روی $\mathbb{R}$ با شدت دلخواه به کار گرفته است. در این جا از ذکر فرمول دقیق مذکور در [۱۴] خودداری می‌کنیم. تعمیمی که در بخش ۳.۵ ارائه خواهیم کرد پاسخ ساده‌تری برای این مسئله خواهد داد. در بخش ۴.۳ و ۳.۵ تعمیمهایی از این ایده را بیان می‌کنیم. با توجه به شباهت اثبات‌ها، از آوردن اثبات‌های نتایج این بخش خودداری می‌کنیم.

۳.۳ تطابق پایدار بین لبگ و پواسون

در این بخش الگوریتم و برخی ایده‌های [۶] را می‌آوریم. این الگوریتم اولین راه حل ساختنی در بعد بیش‌تر از یک برای ساختن الگوی نقطه اضافه است و نقطه جهشی در مطالعه جفت‌سازی انتقالی و الگوی نقطه اضافه بوده است. کارهای ما در فصل ۴ تعمیم روش‌ها و ایده‌های این مقاله برای دو اندازه تصادفی است.

فرض کنید Ψ یک فرآیند نقطه‌ای ارگودیک در $\mathbb{R}^d$ با شدت λ_Ψ باشد. هدف، ساختن یک الگوی نقطه اضافه برای Ψ است. در واقع، در [۶] یک الگوی نقطه اضافه غیر تصادفی ساخته می‌شود. همان‌طور که در نتیجه ۲.۳ و مثال ۳.۳ بیان کردیم، این معادل است با یک تخصیص هم‌ورد موازنه‌گر بین $\lambda_\Psi \mathcal{L}$ و Ψ ؛ یعنی یک کاشی‌کاری هم‌ورد به طوری که به هر نقطه Ψ یک ناحیه با اندازه لبگ $\frac{1}{\lambda_\Psi}$ نسبت دهد و کل فضا پوشیده شود. ایده [۶] تعمیم تطابق پایدار در گراف‌های دوبخشی است. به طور دقیق‌تر، اگر نقاط فضا (که آن‌ها را مکان می‌نامیم) را یک بخش گراف در نظر بگیریم و نقاط Ψ (که آن‌ها را مرکز می‌نامیم) یک بخش دیگر، قرار است به هر مکان یک مرکز تخصیص داده شود به طوری که به هر مرکز مقدار خاصی مکان نسبت داده شود؛ که در آن منظور از مقدار خاص مجموعه‌ای با اندازه لبگ مشخص است. این مفهوم را می‌توان تعمیم تطابق چند به یک در گراف‌های دو بخشی متناهی دانست که به نظر اولین تعمیم این مفهوم به حالت پیوسته است. برای ساختن یک تخصیص به این صورت، ایده تطابق پایدار که توسط گیل و شیپلی در [۴] معرفی شده تعمیم داده شده است.

الگوریتم ۴.۳. فرض کنید Ξ یک زیرمجموعه گسسته از $\mathbb{R}^d$ باشد. مکان‌هایی که از دو یا چند مرکز (یعنی عضو Ξ) به یک فاصله‌اند را فراموش کنید. برای هر عدد طبیعی n ، مرحله n -ام از دو گام زیر تشکیل شده است:

۱. هر مکان مثل x از میان مراکزی که در مراحل قبلی x را رد نکرده‌اند، به نزدیک‌ترین مرکز درخواست می‌دهد.

۲. برای هر مرکز ξ ، A را مجموعه مکان‌هایی که در گام قبل به ξ درخواست داده‌اند در نظر بگیرید (که به n و ξ بستگی دارد). B را کوچک‌ترین گویی (در صورت وجود) در نظر بگیرید که $\mathcal{L}(A \cap B) \geq \frac{1}{\lambda_\Psi}$. حال ξ تمام مکان‌های $A \setminus B$ را رد می‌کند (البته این به معنای پذیرش مکان‌های B نیست و در مراحل بعد ممکن است بعضی اعضای آن نیز رد شوند). در صورتی که چنین گویی وجود نداشت، ξ هیچ مکانی را در این مرحله رد نمی‌کند

به راحتی دیده می‌شود که هر مکان x یا توسط همه مراکز رد می‌شود و یا مرکز ξ وجود دارد که در مرحله‌ای x به ξ درخواست می‌دهد و از آن مرحله به بعد هرگز توسط ξ رد نمی‌شود. در حالت اول قرار دهید $\tau(x) = \infty$ (با ∞ به عنوان یک نقطه اضافه شده به فضا برخورد می‌کنیم که فاصله‌اش از هر نقطه دیگر بینهایت است) و در حالت دوم تعریف کنید $\tau(x) := \xi$.

توجه کنید که الگوریتم فوق برای یک مجموعه غیرتصادفی Ξ تعریف شده است. در [۶] نشان داده شده است که تخصیص τ ساخته شده توسط الگوریتم فوق پایدار است (حتی در حالت غیر تصادفی)، به این معنی که هیچ مکان x و هیچ مرکز ξ وجود ندارد که $\tau(x) \neq \xi$ اما هم x و هم ξ ترجیح دهند که $\tau(x)$ برابر با ξ تعریف شود (معیار ترجیح دادن فاصله اقلیدسی است. برای تعریف دقیق، تعریف ۲.۵ و یا تعریف ۱۴.۴ را ببینید). با یک تعبیر ساده (و البته غیر دقیق)، هیچ دو مکان x_1 و x_2 یافت نشوند که $|x_1 - \tau(x_1)|, |x_2 - \tau(x_2)| < \min\{|x_1 - \tau(x_2)|, |x_2 - \tau(x_1)|\}$. قضیه ۴ در [۶] از پایداری نتیجه می‌گیرد که در حالت تصادفی، یعنی وقتی Ξ نمونه‌ای از Ψ باشد، تقریباً همیشه τ یک تخصیص $(\lambda_\Psi \mathcal{L}, \Psi)$ -موازنه‌گر است (برای یک مثال نقض در حالت غیر تصادفی، مثال ۳۹.۴ را ببینید).

در این جا خلاصه‌ای از اثبات به بیان ساده به نقل از [۸] می‌آوریم و از آوردن اثبات با جزئیات کامل خودداری می‌کنیم (قضیه ۹.۴ این را نتیجه می‌دهد). برای $Q_u, u \in \mathbb{Z}^d$ را مکعب $u + [0, 1)^d$ بگیرد. $m(u, v)$ را برابر با امید ریاضی حجم ناحیه‌ای از Q_u که به مرکزهای عضو Q_v تخصیص داده شده‌اند تعریف کنید. طبق پایایی داریم $m(0, v) = m(-v, 0)$ و بنابراین

$$\sum_{v \in \mathbb{Z}^d} m(0, v) = \sum_{v \in \mathbb{Z}^d} m(-v, 0) = \sum_{v \in \mathbb{Z}^d} m(v, 0).$$

این رابطه حالت ساده‌ای از اصل انتقال جرم (قضیه ۳۱.۱) است. اگر طرفین این رابطه کم‌تر از یک باشند، با احتمال مثبتی ناحیه‌ای با حجم مثبت از مکان‌های عضو Q_0 وجود دارد که تخصیص داده نشده است و با احتمال مثبتی مرکزهایی در Q_0 وجود دارند که حجم کافی به آن‌ها اختصاص داده نشده است. طبق ارگودیک بودن، با احتمال ۱ حجم مثبتی از مکان‌های $\mathbb{R}^d$ تخصیص داده نشده‌اند و با احتمال ۱ مرکزهایی در فضا وجود دارند که حجم کافی به آن‌ها اختصاص داده نشده است. این با پایداری متناقض است.

مثال ۵.۳. حالتی را در نظر بگیرید که Ψ از n^2 نقطه تصادفی یکنواخت و مستقل در چنبره $[0, n]^2$ تشکیل شده باشد. شکل ۱.۳ (ارائه شده در [۶]) یک شبیه‌سازی از تخصیص ساخته شده توسط الگوریتم ۴.۳ را نشان می‌دهد. توجه کنید که نواحی ناهمبند هستند و کمان‌هایی با شعاع نسبتاً زیاد در شکل دیده می‌شوند. در حالت فرآیند نقطه‌ای پواسون در صفحه، کران بالایی برای قطر ناحیه‌ها وجود ندارد.

نکته ۶.۳. فرض کنید بخواهیم الگوریتم ۴.۳ را برای دو اندازه دلخواه به کار ببریم. به جای اندازه لبگ، اندازه φ را بگذارید که تحدید $\mathcal{L}_1$ به $[-\infty, 0]$ است و به جای Ξ اندازه ψ را بگذارید که تحدید $\mathcal{L}_1$ به $[0, \infty)$ است. در گام اول از مرحله اول الگوریتم، تمام مکان‌ها (نقاط محمل φ) به 0 درخواست می‌دهند. اما گام دوم این مرحله و هم‌چنین مراحل بعدی مبهم هستند. همین مشکل در حالت اندازه‌های تصادفی پایا نیز می‌تواند رخ دهد. اگر به یک تخصیص به عنوان یک هسته انتقال نگاه کنیم، که به نقطه x اندازه دیراک $T(x, \cdot) = \delta_{\tau(x)}$ را نسبت می‌دهد، ایده ما این است که اندازه خارج شده از هر نقطه را مجبور کنیم که در فضا پخش شود نه این که تنها به یک نقطه منتقل شود. برای این کار، یک کران بالا برای اندازه $T(x, \cdot)$ می‌گذاریم. با توجه به این که x می‌خواهد به نقاط محمل ψ درخواست دهد، یک کران بالای طبیعی $T(x, B) \leq \psi(B)$ است. این توجیهی برای انتخاب نام مقید برای چنین هسته انتقالی است (تعاریف ۱.۴ و ۲.۴ را ببینید). این ایده را در فصل ۴ پیش می‌گیریم. مثال فوق در مثال ۴۴.۴ تحلیل خواهد شد.



شکل ۱.۳: یک شبیه‌سازی از تخصیص پایدار ساخته شده در [۶] در چنبره. مرکز دایره‌های شکل همان نقاط فرآیند هستند و ناحیه تخصیص داده شده به هر نقطه با حلقه‌های رنگی هم‌مرکز تیره و روشن به مرکز آن نقطه رنگ شده است.

۴.۳ تخصیص پایدار از راست برای دو اندازه بدون اتم و نسبت به هم تکین در حالت یک بعدی

ایده [۱۴] که در بخش ۲.۳ توضیح داده شد، در [۱۲] برای اندازه‌های تصادفی در حالت یک بعدی تعمیم داده شده است. با داشتن $\varphi, \psi \in M$ ، به ازای $x \in \mathbb{R}$ تعریف کنید

$$\tau(x) := \inf\{\xi \geq x : \varphi([x, \xi]) = \psi([x, \xi])\}. \quad (۱.۳)$$

قضیه ۱.۵ از [۱۲] می‌گوید

قضیه ۷.۳. فرض کنید Φ و Ψ دو اندازه تصادفی ارگودیک روی $\mathbb{R}$ با شدت برابر باشند. فرض کنید تقریباً همیشه

Φ و Ψ اتم ندارند و نسبت به هم تکین هستند. در این صورت تخصیص ساخته شده توسط (۱.۳) برای Φ و Ψ ، تقریباً همیشه یک تخصیص (Φ, Ψ) -موازنه‌گر است.

هم‌چنین، قضیه ۱.۷ از همان مقاله بیان می‌کند که با شرایط قضیه فوق تخصیص ساخته شده پایدار از راست است، به این معنی که برای $(\Phi \otimes \Phi)$ -تقریباً هر زوج (x_1, x_2) نمی‌توانیم داشته باشیم $x_1 < x_2 \leq \tau(x_1) < \tau(x_2)$. این مفهوم مشابه پایداری تحت جابجایی^۲ در مبحث تطابق‌ها است، به این معنی که لاقل یکی از x_1 و x_2 دوست ندارد که مقدار تخصیص داده شده به آن توسط τ را با مقدار تخصیص داده شده به دیگری عوض کند. در آن مقاله، قضیه فوق در حالتی که Φ و Ψ هر دو فرآیندهای نقطه‌ای ساده باشند نیز بیان شده است. در بخش ۳.۵ این ایده را تعمیم می‌دهیم به حالتی که ψ بتواند اتم داشته باشد (اما هم‌چنان φ بدون اتم باشد) و هم‌چنین φ و ψ لزوماً نسبت به هم تکین نباشند؛ البته با یک شرط ضعیف‌تر (فرض ۹.۵) که نشان خواهیم داد یک شرط لازم است. هم‌چنین مفهوم پایداری از راست را به صورت قوی‌تری تعریف می‌کنیم (تعریف ۲۷.۵). نشان خواهیم داد حتی در حالت غیر تصادفی (که τ میتواند موازنه‌گر نباشد) نیز تخصیص (۱.۳) پایدار از راست است. بنابراین از ذکر اثبات قضیه فوق در این‌جا خودداری می‌کنیم. در [۱۲] تخصیص (۱.۳) برای حرکت براونی به کار گرفته شده است. فرض کنید B_t حرکت براونی^۳ باشد که در زمان‌های $t \in (-\infty, \infty)$ تعریف شده است. منظور از یک شیفت نارایب^۴، یک زمان تصادفی τ است که تابع تصادفی $\tilde{B}_t := B_{t+\tau} - B_\tau$ یک حرکت براونی هم‌توزیع با B_t باشد. به عنوان یک مثال غلط، اگر τ اولین زمان برخورد به ۱ باشد؛ یعنی $\tau := \inf\{t \geq 0 : B_t = 1\}$ ، آن‌گاه τ یک شیفت نارایب نیست؛ زیرا $\tilde{B}_t$ همواره در یک بازه به شکل $(-\epsilon, 0)$ منفی است، در حالی که B_t چنین نیست. فرض کنید برای $x \in \mathbb{R}$ مکان موضعی^۵ در نقطه x باشد؛ یعنی به طور شهودی $l^x(a, b)$ مقداری از زمان در بازه زمانی (a, b) است که حرکت براونی در نزدیکی x سپری کرده است. با این تعریف می‌توان l^x را به عنوان یک اندازه تصادفی در نظر گرفت. این اندازه تصادفی روی مجموعه $\{t : B_t = x\}$ متمرکز است. حالت خاصی از قضیه ۳.۱ در [۱۲] می‌گوید که با در نظر گرفتن تخصیص (۱.۳) برای دو اندازه تصادفی l° و l^1 ، $\tau(0)$ یک شیفت نارایب است. به طور کلی‌تر، اگر برای اندازه احتمال ν روی $\mathbb{R}$ تعریف کنیم $l^\nu := \int l^x \nu(dx)$ ، قضیه ۴.۱ از [۱۲] می‌گوید که

قضیه ۸.۳. با فرض این که $\nu(\{0\}) = 0$ ، اگر τ تخصیص ساخته شده توسط (۱.۳) برای l° و l^ν باشد، آن‌گاه $\tau(0)$ یک شیفت نارایب است به طوری که توزیع $B_{\tau(0)}$ همان ν است.

برای اثبات این قضیه، از قضیه ۷.۳ برای l° و l^ν استفاده می‌شود؛ یعنی τ تقریباً همیشه یک تخصیص (l°, l^ν) -موازنه‌گر است. البته با این که این دو اندازه پایا نیستند، در [۱۲] فضای احتمال را گسترش می‌دهند به طوری که $\mathbb{P}[B_\bullet \in (a, b)] = |a - b|$ اندازه $\mathbb{P}$ که حاصل می‌شود، یک اندازه احتمال نیست، بلکه یک اندازه سیگما-متناهی است. به هر حال برای اندازه‌های سیگما-متناهی هم مفهوم اندازه پایا، توزیع پالم و ... تعریف می‌شود و

^۲Exchange-stability

^۳Brownian motion

^۴Unbiased shift

^۵Local time

بسیاری از قضایا معتبر خواهند بود ([۱۳] را نیز ببینید). در این حالت l° و l^ν پایا خواهند بود. با توجه به این که در فصل ۳.۵ فرض نمیکنیم Φ و Ψ نسبت به هم تکین هستند، در نکته ۲۶.۵ نشان خواهیم داد که در قضیه ۸.۳ شرط $\nu(\{0\}) = 0$ لازم نیست. حالتی که $\nu(\{0\}) > 0$ در [۱۲] به طریق دیگری بررسی شده است.

فصل ۴

چگالی‌های انتقال مقید

تعاریف و نتایج این فصل، تعمیم [۶] هستند و در [۵] منتشر شده‌اند. در بخش ۳.۳ خلاصه‌ای از [۶] را به عنوان انگیزه این فصل آورده‌ایم. اثبات همه گزاره‌ها را به بخش ۵.۴ موکول می‌کنیم.

۱.۴ انتقال جرم مقید

در این بخش فرض کنید φ و ψ دو اندازه بول نامنفی داده شده روی $\mathbb{R}^d$ باشند.

تعریف ۱.۴. هسته انتقال وزن دار T را ψ -مقید^۱ می‌نامیم هرگاه برای هر $x \in \mathbb{R}^d$ داشته باشیم $T(x, \cdot) \leq \psi$.

در نکته ۶.۳ انگیزه ارائه این تعریف بیان شده است. همان‌طور که در فصل ۵ خواهیم دید، یک هسته انتقال ψ -مقید (φ, ψ) -موازنه‌گر نمی‌تواند یک تخصیص باشد مگر این که ψ گسسته باشد. حالتی که نتایج این فصل منجر به ساختن یک تخصیص موازنه‌گر می‌شود در بخش ۱.۵ بررسی خواهد شد. با توجه به این که برای هر x ، $T(x, \cdot)$ نسبت به ψ مطلقاً پیوسته است، می‌توانیم با مشتق رادون نیکودایم آن کار کنیم. البته باید این کار را به نحو اندازه‌پذیری انجام دهیم. تعریف زیر و نکته ۴.۴ این امر را محقق می‌کند.

تعریف ۲.۴. تابع اندازه‌پذیر و نامنفی $f(x, \xi)$ روی $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ را یک چگالی انتقال شبه موازنه‌گر^۲ (برای φ و ψ) گوئیم هرگاه

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x, \xi) \psi(d\xi) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x, \xi) \varphi(dx) \leq 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

این چگالی انتقال موازنه‌گر است هرگاه تساوی برای φ -تقریباً هر x و ψ -تقریباً هر ξ برقرار باشد. هم‌چنین f را مقید می‌نامیم هرگاه شبه موازنه‌گر باشد و $f \leq 1$.

^۱Constrained

^۲Sub-balancing

قرارداد ۳.۴. در این پایان‌نامه، برای راحتی هرگاه از عبارات‌های هسته انتقال مقید، چگالی انتقال مقید و چگالی انتقال شبه‌موازنه‌گر استفاده می‌کنیم، منظور یک انتقال جرم وزن‌دار است.

نکته ۴.۴. طبق تعریف ۲.۰.۱ با داشتن یک چگالی انتقال مقید می‌توان یک هسته انتقال مقید ساخت. به عکس، طبق گزاره ۲.۱.۱، هر هسته انتقال مقید یک چگالی انتقال مقید $\varphi \otimes \psi$ -یکتا مشخص می‌کند. در تعریف پایداری (تعریف ۱.۴.۴) نیاز داریم مقادیر f را روی همه نقاط بدانیم، نه فقط روی تقریباً همه نقاط. بنابراین به جای هسته‌های انتقال مقید، از این به بعد با چگالی‌های انتقال مقید کار خواهیم کرد. این موضوع کمک می‌کند تا بتوانیم در اثبات‌ها از برهان خلف استفاده کنیم و با یافتن تنها یک جفت نقطه خاص با پایداری به تناقض برسیم.

توجه کنید که تعریف چگالی انتقال مقید پایدار به هردوی φ و ψ بستگی دارد، اما برای سادگی از پیشوند برای آن استفاده نمی‌کنیم. مفهوم انتقال جرم مقید حالت خاصی از انتقال جرم با ظرفیت محدود^۳ است که در [۱۱] معرفی شده است. تعبیر آن این است که برای انتقال جرم از هر ناحیه به هر ناحیه دیگر محدودیت خاصی وجود دارد. به طور دقیق‌تر، در انتقال جرم مقید جرم (بینهایت کوچک) منتقل شده از نقطه x به ناحیه B حداکثر $\psi(B)$ است. معادلاً جرم منتقل شده از ناحیه A به ناحیه B حداکثر $\varphi(A)\psi(B)$ است.

۲.۴ ساختن جفت‌سازی انتقالی و الگوی نقطه اضافه در حالت کلی

در این بخش الگوریتم اصلی برای ساختن جفت‌سازی انتقالی را بیان خواهیم کرد. ایده اصلی این است که خود را به چگالی‌های انتقال مقید محدود کنیم تا بتوانیم مفهوم پایداری را تعریف کنیم و الگوریتم تطابق پایدار گیل و شیپلی را تعمیم دهیم.

اندازه‌های φ و ψ را داده‌شده فرض کنید. با توجه به این که با این دو اندازه به طور متفاوت رفتار خواهیم کرد، مفید است که از نام‌های مکان^۴ و مرکز^۵ به ترتیب برای نقاط محمل φ و ψ استفاده کنیم. تصور کنید که دو کپی از $\mathbb{R}^d$ موجود است؛ در یک کپی مکان‌ها و اندازه φ موجود است و در کپی دیگر مرکزها و اندازه ψ . اما فاصله مکان‌ها و مرکزها را به طریق معمولی حساب می‌کنیم. برای راحتی خواندن، از حروف لاتین برای مکان‌ها و از حروف یونانی برای مرکزها استفاده خواهیم کرد.

پیش از بیان الگوریتم ۵.۴، ابتدا یک دید کلی از نمادهای ذکر شده در الگوریتم ارائه می‌دهیم. در این الگوریتم دو تابع $A(x, \xi)$ و $R(x, \xi)$ ساخته می‌شود. تعبیر تابع اول وزنی است که x به ξ درخواست داده است و تابع دوم مقداری از وزن درخواستی x است که ξ رد کرده است. در نهایت چگالی انتقال حاصل شده $f_s := A - R$ خواهد بود. این الگوریتم از بینهایت مرحله تشکیل شده است و هر مرحله دو گام دارد. در مرحله n -ام، هر مکان x به مرکزها با وزن $[0, 1] : \mathbb{R}^d \rightarrow A_n(x, \cdot)$ درخواست می‌دهد. سپس هر مرکز ξ در صورتی که به ظرفیت خود رسیده باشد مقداری از وزن‌های درخواستی را رد می‌کند، که مقدار وزن رد شده را با $R_n(\cdot, \xi)$ نشان می‌دهیم. توجه

^۳Capacity constrained

^۴Site

^۵Center

داشته باشید که حتی اگر $R_n(x_0, \xi_0) > 0$ ، هم‌چنان در مراحل بعد به ξ_0 درخواست خواهد داد. توابع R_n و A_n بر حسب n صعودی خواهند بود. ایده شهودی برای انتخاب R_n و A_n در الگوریتم این است که هر مکان دوست دارد به نزدیک‌ترین مراکز ممکن درخواست دهد (به صورت حریصانه) و هر مرکز دوست دارد از وزن‌های درخواستی مکان‌های نزدیک‌تر هیچ‌مقداری را رد نکند. برای تصویر یک مثال از الگوریتم با شکل، مثال‌های بخش ۶.۴ را ببینید. مثال ۳۶.۴ نشان می‌دهد که این الگوریتم تعمیم الگوریتم [۶] است. نام‌گذاری مکان-بهینه نیز در نتیجه ۲۵.۴ توجیه خواهد شد.

الگوریتم ۵.۴ (الگوریتم مکان-بهینه^۶). دو اندازه φ و ψ روی $\mathbb{R}^d$ را در نظر بگیرید. تابع رد را در ابتدا صفر قرار دهید؛ یعنی $R_0(x, \xi) := 0$ برای هر $(x, \xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. برای هر عدد طبیعی n ، مرحله n -ام از دو گام زیر تشکیل شده است.

۱. برای هر مکان x_0 ، شعاع درخواست^۷ x_0 در مرحله n -ام را به صورت زیر تعریف کنید.

$$a_n(x_0) := \inf \left\{ a : \int_{B_a(x_0)} (1 - R_{n-1}(x_0, \xi)) \psi(d\xi) \geq 1 \right\}. \quad (1.4)$$

تابع درخواست^۸ در مرحله n -ام را به صورت زیر تعریف کنید.

$$A_n(x_0, \xi) := \begin{cases} 1 & |x_0 - \xi| < a_n(x_0), \\ cR_{n-1}(x_0, \xi) + (1 - c) & |x_0 - \xi| = a_n(x_0), \\ 0 & |x_0 - \xi| > a_n(x_0), \end{cases}$$

که در آن $c = c_n(x_0)$ عددی در $[0, 1]$ است به طوری که در حالتی که $a_n(x_0) < \infty$ داشته باشیم

$$\int_{\mathbb{R}^d} (A_n(x_0, \xi) - R_{n-1}(x_0, \xi)) \psi(d\xi) = 1. \quad (2.4)$$

در حالتی که $a_n(x_0) = \infty$ یا $\psi(\partial B_{a_n(x_0)}(x_0)) = 0$ ، قرار می‌دهیم $c = 1$ (این مقدار ثابت به دلخواه انتخاب شده است). می‌گوییم x_0 در مرحله n -ام با وزن $A_n(x_0, \cdot)$ به مراکز درخواست می‌دهد.

۲. برای هر مرکز ξ_0 ، شعاع رد^۹ ξ_0 در مرحله n -ام را به صورت زیر تعریف کنید.

$$r_n(\xi_0) := \inf \left\{ r : \int_{B_r(\xi_0)} A_n(x, \xi_0) \varphi(dx) \geq 1 \right\}. \quad (3.4)$$

^۶Site-optimal

^۷Application radius

^۸Application Function

^۹Rejection Radius

تابع رد^{۱۰} در مرحله n -ام را به صورت زیر تعریف کنید.

$$R_n(x, \xi_0) := \begin{cases} 0 & |x - \xi_0| < r_n(\xi_0), \\ c' A_n(x, \xi_0) & |x - \xi_0| = r_n(\xi_0), \\ A_n(x, \xi_0) & |x - \xi_0| > r_n(\xi_0), \end{cases}$$

که در آن $c' = c'_n(\xi_0)$ عددی در $[0, 1]$ است به طوری که در حالتی که $r_n(\xi_0) < \infty$ داشته باشیم

$$\int_{\mathbb{R}^d} (A_n(x, \xi_0) - R_n(x, \xi_0)) \varphi(dx) = 1.$$

در حالتی که $r_n(\xi_0) = \infty$ یا $\varphi(\partial B_{r_n(\xi_0)}(\xi_0)) = 0$ قرار می‌دهیم $c' = 0$. می‌گوییم ξ_0 در مرحله n -ام وزن‌های درخواستی را طبق $R_n(\cdot, \xi_0)$ رد می‌کند.

در اثبات لم ۶.۴ خواهیم دید که $c_n(x_0)$ و $c'_n(\xi_0)$ که در الگوریتم فوق تعریف شده اند وجود دارند و خوش‌تعریف هستند.

لم ۶.۴. در الگوریتم ۵.۴، توابع A_n ، R_n و a_n بر حسب n صعودی هستند و r_n نزولی است. به علاوه، این توابع به صورت اندازه‌پذیر و هم‌ورد به φ و ψ بستگی دارند.

لم فوق به ما این امکان را می‌دهد که تعاریف زیر را ارائه دهیم.

تعریف ۷.۴. در الگوریتم ۵.۴، شعاع درخواست (نهایی)، شعاع رد (نهایی)، تابع درخواست، تابع رد و چگالی انتقال مکان-بهینه^{۱۱} (که یک چگالی انتقال وزن‌دار است) به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned} a(x) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x), \\ r(\xi) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(\xi), \\ A(x, \xi) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x, \xi), \\ R(x, \xi) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, \xi), \\ f_s(x, \xi) &:= A(x, \xi) - R(x, \xi). \end{aligned}$$

هسته انتقال وزن‌داری که طبق نکته ۴.۴ از روی f_s به دست می‌آید را هسته انتقال مکان-بهینه^{۱۲} می‌نامیم.

تعریف ۸.۴. الگوریتم مرکز-بهینه^{۱۳} برای φ و ψ ، همان الگوریتم ۵.۴ برای ψ و φ است؛ یعنی تنها نقش مکان‌ها و مرکزها را عوض می‌کنیم. چگالی انتقال مرکز-بهینه^{۱۴} f_c نیز مشابه تعریف ۷.۴ با استفاده از الگوریتم مرکز-بهینه تعریف می‌شود.

^{۱۰}Rejection function

^{۱۱}Site-optimal transport density

^{۱۲}Site-optimal transport kernel

^{۱۳}Center-optimal

^{۱۴}Center-optimal transport density

قضیه ۹.۴. فرض کنید Φ و Ψ دو اندازه تصادفی پایا در $\mathbb{R}^d$ باشند. در صورتی که شدت‌های نمونه‌ای Φ و Ψ برابر و مثبت باشند، آنگاه چگالی انتقال مکان-بهینه که توسط الگوریتم ۵.۴ ساخته می‌شود، تقریباً همیشه یک چگالی انتقال موازنه‌گر بین Φ و Ψ است. بنابراین، طبق تعریف ۲۰.۱ تقریباً همیشه یک هسته انتقال (Φ, Ψ) -موازنه‌گر ارائه می‌دهد.

قضایای ۹.۴ و ۱۰.۴ هدف‌های اصلی این فصل هستند. در فصل‌های ۲ و ۳ توضیح دادیم که چرا به ساختن هسته انتقال موازنه‌گر هم‌ورد و الگوی نقطه اضافه علاقه‌مندیم. این قضایا هدف مذکور را برای اندازه‌های تصادفی ارگودیک دلخواه برآورده می‌کند.

قضیه ۱۰.۴ (الگوی نقطه اضافه). فرض کنید Ψ یک اندازه تصادفی پایا در $\mathbb{R}^d$ باشد که شدت نمونه‌ای آن مقدار ثابت $0 < \lambda_\Psi < \infty$ باشد و قرار دهید $\Phi := \lambda_\Psi \mathcal{L}_d$. فرض کنید $F = F_\omega(x, \xi)$ یک تابع هم‌ورد باشد که تقریباً همیشه یک چگالی انتقال موازنه‌گر بین Φ_ω و Ψ_ω باشد؛ به عنوان مثال چگالی انتقال مکان-بهینه برای Φ_ω و Ψ_ω (طبق قضیه ۹.۴).

آ. اگر Y یک بردار تصادفی باشد که توزیع آن به شرط Ψ برابر باشد با $\Psi(\cdot, \cdot)$ ، آنگاه Y یک الگوی نقطه اضافه است؛ یعنی $\theta_Y \Psi$ هم‌توزیع با نسخه پالم Ψ است.

ب. در فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\Psi)$ ، اگر Y یک بردار تصادفی باشد که توزیع آن به شرط Ψ برابر باشد با $\Phi(\cdot, \cdot)$ ، آنگاه اندازه تصادفی $(\mathbb{P}_\Psi, \theta_Y \Psi)$ هم‌توزیع با $(\mathbb{P}, \Psi)$ است. به عبارت دیگر، توزیع Ψ از نسخه پالم آن با انتقال θ_Y بازسازی می‌شود.

این قضیه نتیجه مستقیم قضایای ۱۱.۲ و ۱۳.۲ است (و همچنین نتیجه ساده‌ای از قضیه ۱۰.۴ در [۱۳] است و در حالت فرآیندهای نقطه‌ای، نتیجه‌ای از قضیه ۱۶ در [۸]). این قضیه را تنها برای تأکید بر اهداف این پایان‌نامه در اینجا بازنویسی کرده‌ایم.

نکته ۱۱.۴. با این که الگوی نقطه اضافه مذکور در قضیه ۱۰.۴ غیر تصادفی نیست، اما این خاصیت را دارد که توزیع Y به شرط Ψ تنها به Ψ بستگی دارد (و نه به فضای احتمال). در بخش ۲.۱.۵ نشان می‌دهیم در حالت کلی لزوماً الگوی نقطه اضافه غیر تصادفی وجود ندارد. همچنین حالات خاص و روش‌های دیگر برای ساختن الگوی نقطه اضافه غیر تصادفی را در فصل ۵ بررسی می‌کنیم.

نکته ۱۲.۴. در الگوریتم ۵.۴، می‌توانستیم تابع $A_n(x_\circ, \cdot)$ را روی $\partial B_{a_n(x_\circ)}(x_\circ)$ تابع $R_n(\cdot, \xi_\circ)$ را روی $\partial B_{r_n(\xi_\circ)}(\xi_\circ)$ به طرق دیگری نیز تعریف کنیم. در صورتی که این تعریف طوری انجام شود که لم ۶.۴ و نکته ۳۰.۴ برقرار باشند، آنگاه سایر نتایج آتی نیز برقرار خواهند بود.

نکته ۱۳.۴. پایا بودن در قضیه ۱۶.۴ شرطی اساسی است. مثال ۳۹.۴ حالتی را نشان می‌دهد که چگالی انتقال مکان-بهینه موازنه‌گر نیست، با وجود این که اندازه‌های (غیر تصادفی) مذکور در آن مثال دارای چگالی برابر هستند؛

به این معنی که وقتی $r \rightarrow \infty$ داریم $\varphi([-r, r]) \sim \psi([-r, r])$. همان طور که در [۷] ذکر شده است، به نظر سخت می‌آید که شرطی غیر تصادفی برای مجموعه‌های گسسته (و هم‌چنین برای اندازه‌ها) ارائه دهیم که تضمین کند چگالی انتقال مکان-بهینه موازنه‌گر باشد.

۳.۴ پایداری چگالی‌های انتقال مقید

تعریف ۱۴.۴. فرض کنید $\varphi, \psi \in M$ معلوم باشند و f یک چگالی انتقال مقید باشد. مکان x_0 را راضی^{۱۵} می‌نامیم هرگاه

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x_0, \xi) \psi(d\xi) = 1$$

و در غیر این صورت آن را ناراضی^{۱۶} می‌نامیم. به طور مشابه، مرکز ξ_0 را اشباع‌شده^{۱۷} می‌نامیم هرگاه

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x, \xi_0) \varphi(dx) = 1$$

و در غیر این صورت آن را اشباع‌نشده^{۱۸} می‌نامیم. می‌گوییم مکان x_0 مرکز ξ_0 را می‌خواهد هرگاه $f(x_0, \xi_0) < 1$ و هم‌چنین یکی از دو شرط زیر برقرار باشد

۱. مکان x_0 ناراضی باشد.

۲. نقطه ξ_1 وجود داشته باشد که $|x_0 - \xi_0| > |x_0 - \xi_1|$ و $f(x_0, \xi_1) > 0$.

به طور مشابه می‌گوییم مرکز ξ_0 مکان x_0 را می‌خواهد هرگاه $f(x_0, \xi_0) < 1$ و هم‌چنین یکی از دو شرط زیر برقرار باشد

۱. مرکز ξ_0 اشباع نشده باشد.

۲. نقطه x_1 وجود داشته باشد که $|x_0 - \xi_0| > |x_1 - \xi_0|$ و $f(x_1, \xi_0) > 0$.

چگالی انتقال مقید f را پایدار^{۱۹} می‌گوییم هرگاه هیچ زوج (x_0, ξ_0) در $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ موجود نباشد که یکدیگر را بخواهند. در صورت وجود ابهام در مورد f ، از پیشوند f - برای تعاریف فوق استفاده می‌کنیم؛ برای مثال f -اشباع شده.

^{۱۵}Exhausted

^{۱۶}Unexhausted

^{۱۷}Sated

^{۱۸}Unsated

^{۱۹}Stable

در تعریف فوق، هر مکان مراکز را بر اساس فاصله اقلیدسی ترجیح می‌دهد و بالعکس. برای مثال‌هایی از یک چگالی انتقال مقید پایدار و ناپایدار، مثال‌های ۳۹.۴ و ۴۰.۴ را ببینید.

قضیه ۱۵.۴ (پایداری). چگالی انتقال مکان-بهینه یک چگالی انتقال مقید پایدار است و به صورت اندازه‌پذیر و هم‌ورد به φ و ψ بستگی دارد.

قضیه ۱۶.۴. فرض کنید Φ و Ψ دو اندازه تصادفی ارگودیک روی $\mathbb{R}^d$ باشند که شدت آن‌ها به ترتیب مقادیر مثبت λ_Φ و λ_Ψ است. فرض کنید $F = F_\omega(x, \xi)$ یک تابع هم‌ورد باشد که تقریباً همیشه یک چگالی انتقال مقید پایدار برای Φ_ω و Ψ_ω است. در این صورت تقریباً همیشه خواهیم داشت

آ. اگر $\lambda_\Phi = \lambda_\Psi$ ، آن‌گاه F یک چگالی انتقال (Φ, Ψ) -موازنه گر است؛ یعنی مجموعه مکان‌های ناراضی و مجموعه مرکزهای اشباع نشده به ترتیب تحت Φ_ω و Ψ_ω اندازه صفر هستند.

ب. اگر $\lambda_\Phi < \lambda_\Psi$ ، آن‌گاه هیچ مکان ناراضی‌ای وجود ندارد، اما مجموعه مرکزهای اشباع نشده نسبت به Ψ_ω اندازه نامتناهی دارد.

پ. اگر $\lambda_\Phi > \lambda_\Psi$ ، آن‌گاه هیچ مرکز اشباع نشده‌ای وجود ندارد اما مجموعه مکان‌های ناراضی نسبت به Φ_ω اندازه نامتناهی دارد.

در گزاره ۲۲.۴ نشان خواهیم داد که مرکزها (و به طور مشابه مکان‌ها) در حالت دوم قضیه (و به طور مشابه حالت سوم) به طور متوسط چقدر از اشباع شدن (و به طور مشابه راضی شدن) فاصله دارند.

۴.۴ خواص دیگر چگالی‌های انتقال مقید و پایدار

در این بخش یکنوایی، بهینه بودن، یکتایی و کران‌دار بودن قلمروهای^{۲۰} چگالی‌های انتقال مقید پایدار را بررسی می‌کنیم. در حالت کلی غیر تصادفی، یکتایی لزوماً برقرار نیست (برای یک مثال نقض [۶] را ببینید)، هرچند در حالتی که یکی از اندازه‌ها اندازه لبگ باشد (برای یافتن الگوی نقطه اضافه) پاسخ را نمی‌دانیم. انتخابی که در الگوریتم ۵.۴ برای نقاط هم‌فاصله وجود دارد (طبق نکته ۱۲.۴) می‌تواند مانعی برای یکتایی باشد. برای مثال، این موضوع برای اندازه‌های تصادفی روی $\mathbb{Z}^d$ مهم است. فرض ۱۷.۴ که در زیر می‌آوریم تضمین می‌کند که انتخاب توابع در الگوریتم ۵.۴ (طبق نکته ۱۲.۴)، تقریباً همه‌جا یکتا باشد، اما با این حال یکتایی نهایی را تنها در حالت تصادفی و پایا ثابت خواهیم کرد (قضیه ۲۷.۴). پیش از اثبات یکتایی، در مورد یکنوایی و بهینه بودن چگالی‌های انتقال مقید پایدار بحث خواهیم کرد.

^{۲۰}Territory

فرض ۱۷.۴. برای φ -تقریباً هر مکان مانند x و ψ -تقریباً هر مرکز مانند ξ داریم

$$\forall r > 0, \exists s \in \partial B_r(x) : \psi(\partial B_r(x) \setminus \{s\}) = 0, \quad (4.4)$$

$$\forall r > 0, \exists s \in \partial B_r(\xi) : \varphi(\partial B_r(\xi) \setminus \{s\}) = 0. \quad (5.4)$$

نکته ۱۸.۴. شرط (۴.۴) معادل است با این که برای φ -تقریباً هر مکان x ، مرز هیچ گوی به مرکز x را نمی‌توان به دو قسمت با اندازه مثبت (تحت ψ) افراز کرد. برای شرط (۵.۴) نیز تعبیر مشابهی برقرار است.

گزاره زیر نشان می‌دهد که برقرار بودن فرض ۱۷.۴ چندان عجیب نیست.

گزاره ۱۹.۴. اگر حداقل یکی از ψ و φ به تمام ابرصفحه‌ها و مرز تمام گوی‌ها اندازه صفر نسبت دهد؛ مثلاً وقتی یکی از ψ و φ نسبت به اندازه لبگ مطلقاً پیوسته باشد، آنگاه فرض ۱۷.۴ برقرار است.

برای یک چگالی انتقال وزن دار f ، از توابع زیر کمک می‌گیریم به عنوان معیاری که جرم خارج شده از یک مکان، و هم‌چنین جرم وارد شده به یک مرکز، در چه فاصله‌ای پخش شده است.

تعریف ۲۰.۴. فرض کنید f طبق تعریف ۲.۴ یک چگالی انتقال وزن دار باشد. به ازای $t \in [0, \infty]$ تعریف کنید.

$$\begin{aligned} \psi_x(f, t) &:= \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \xi) \mathbf{1}_{|x-\xi| \leq t} \psi(d\xi), \\ \varphi^\xi(f, t) &:= \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \xi) \mathbf{1}_{|x-\xi| \leq t} \varphi(dx). \end{aligned}$$

نکته ۲۱.۴. اگر $f(x, \xi) < 1$ و $\psi_x(f, |x - \xi|) < 1$ ، آنگاه مکان x مرکز ξ را می‌خواهد. به طور مشابه، اگر $f(x, \xi) < 1$ و $\varphi^\xi(f, |x - \xi|) < 1$ ، آنگاه مرکز ξ مکان x را می‌خواهد. توجه کنید که عکس این خواص لزوماً برقرار نیست؛ یعنی x حتی وقتی که $\psi_x(f, |x - \xi|) = 1$ باز هم ممکن است ξ را نخواهد، زیرا $f(x, \cdot)$ ممکن است روی یک مجموعه ψ -اندازه صفر که حاوی نقاطی دورتر از ξ است مثبت باشد. هم‌چنین، مکان x راضی شده است اگر و تنها اگر $\psi_x(f, \infty) = 1$ و مرکز ξ اشباع شده است اگر و تنها اگر $\varphi^\xi(f, \infty) = 1$.

با ذکر تعریف فوق، خوب است به گزاره زیر اشاره کنیم.

گزاره ۲۲.۴. با شرایط قضیه ۱۶.۴، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\Phi(B_r(o))} \int_{B_r(o)} \Psi_x(F, \infty) \Phi(dx) &= \min\{1, \frac{\lambda_\Psi}{\lambda_\Phi}\}, \text{ a.s.} \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\Psi(B_r(o))} \int_{B_r(o)} \Phi^\xi(F, \infty) \Psi(d\xi) &= \min\{1, \frac{\lambda_\Phi}{\lambda_\Psi}\}, \text{ a.s.} \end{aligned}$$

توجه کنید که $\Psi_x(F, \infty)$ و $\Phi^\xi(F, \infty)$ جرم خارج شده از x و جرم وارد شده به ξ هستند. بنابراین عبارت‌های سمت چپ در این دو تساوی میانگین فضایی جرم خارج شده از مکان‌ها و جرم وارد شده به مرکزها را نشان می‌دهند. این روابط معیاری کمی هستند که میزان فاصله مکان‌ها و مرکزها از اقناع شدن را نشان می‌دهند.

با استفاده از تعریف ۲۰.۴ یکنوایی را به شکل زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۲۳.۴ (یکنوایی، حالت اول). فرض کنید (φ, ψ) و (μ, ν) دو زوج مرتب از اندازه‌ها باشند به طوری که $\mu \geq \varphi$ و $\nu \leq \psi$. چگالی انتقال مکان-بهینه برای زوج‌های (φ, ψ) و (μ, ν) را به ترتیب f_s و f'_s بنامید و شعاع درخواست در تعریف f_s (طبق الگوریتم ۵.۴) را $a(\cdot)$ بنامید. در این صورت

آ. برای هر زوج (x, ξ) ، اگر x به ξ به طور کامل درخواست دهد (در تعریف f_s)؛ مثلاً وقتی که $|x - \xi| < a(x)$ ، آن‌گاه

$$f'_s(x, \xi) \leq f_s(x, \xi).$$

ب. برای هر مکان x و هر $t \in [0, \infty]$ داریم

$$\nu_x(f'_s, t) \leq \psi_x(f_s, t).$$

پ. برای هر مرکز ξ و هر $t \in [0, \infty]$ داریم

$$\mu^\xi(f'_s, t) \geq \varphi^\xi(f_s, t).$$

به صورت شهودی، این به این معنی است که اگر مکان‌ها کم شوند و مرکزها زیاد شوند، وضعیت برای همه مکان‌ها بهتر و برای همه مرکزها بدتر می‌شود. همچنین توجه کنید که در قسمت (آ)، ممکن است در بعضی نقاط خارج از $B_{a(x_0)}(x_0)$ بیش‌تر از f_s باشد.

در قضیه زیر حکم مشابهی را برای حالتی که به جای f'_s یک چگالی انتقال مقید پایدار دلخواه بگذاریم بیان می‌کنیم. برای این حالت کلی، با توجهی مشابه ابتدای این بخش، فرض ۱۷.۴ را فرض خواهیم کرد. هم‌چنین احکام قضیه، «تقریباً همه جا» درست خواهند بود، نه برای همه نقاط.

قضیه ۲۴.۴ (یکنوایی، حالت دوم). فرض کنید (φ, ψ) و (μ, ν) دو زوج مرتب از اندازه‌ها باشند به طوری که $\mu \geq \varphi$ و $\nu \leq \psi$ و زوج (μ, ψ) در فرض ۱۷.۴ صدق کند. چگالی انتقال مکان-بهینه f_s برای (φ, ψ) و سایر توابع تعریف ۷.۴ را در نظر بگیرید و f را یک چگالی انتقال مقید پایدار دلخواه برای (μ, ν) فرض کنید.

آ. به صورت $(\mu \otimes \psi)$ -تقریباً همه‌جا خواهیم داشت

$$f + R \leq 1.$$

ب. برای $(\mu \otimes \psi)$ -تقریباً هر زوج (x, ξ) ، اگر x به ξ به طور کامل درخواست دهد؛ مثلاً وقتی که $|x - \xi| < a(x)$ ، آن‌گاه $f(x, \xi) \leq f_s(x, \xi)$.

پ. برای μ -تقریباً هر مکان x داریم

$$\nu_x(f, t) \leq \psi_x(f_s, t), \quad \forall t \in [0, \infty].$$

ت. برای ψ -تقریباً هر مرکز ξ داریم

$$\mu^\xi(f, t) \geq \varphi^\xi(f_s, t), \quad \forall t \in [0, \infty].$$

نتیجه زیر مستقیماً از قضیه ۲۴.۴ به دست می‌آید. توجه کنید که نامساوی‌های شامل f_c از نامساوی‌های شامل f_s نتیجه می‌شوند (برای این کار کافی است نقش مکان‌ها و مرکزها را عوض کنیم).

نتیجه ۲۵.۴ (بهینه بودن). فرض کنید φ و ψ در فرض ۱۷.۴ صدق می‌کنند و f را یک چگالی انتقال مقید پایدار دلخواه برای φ و ψ در نظر بگیرید. چگالی‌های انتقال مکان-بهینه و مرکز-بهینه را نیز با f_s و f_c نشان دهید.

آ. برای φ -تقریباً هر مکان x داریم

$$\psi_x(f_s, t) \geq \psi_x(f, t) \geq \psi_x(f_c, t), \quad \forall t \in [0, \infty].$$

ب. برای ψ -تقریباً هر مرکز ξ داریم

$$\varphi^\xi(f_c, t) \geq \varphi^\xi(f, t) \geq \varphi^\xi(f_s, t), \quad \forall t \in [0, \infty].$$

به عبارت دیگر، در بین تمام چگالی‌های مقید پایدار، چگالی انتقال مکان-بهینه برای هر یک از مکان‌ها به‌ترین و برای هر یک از مرکزها بدترین است. این توجیهی برای نام‌گذاری مکان-بهینه و مرکز-بهینه در الگوریتم ۵.۴ است. ویژگی مشابهی نیز برای الگوریتم گیل-شپلی در گراف‌های دو بخشی وجود دارد. توجه کنید که تعبیر فوق از بهینه بودن، به نظریه انتقال جرم بهینه مرتبط نیست.

همان‌طور که در ابتدای این بخش گفتیم، به نظر سخت می‌آید که شرط ساده‌ای در حالت غیرتصادفی ارائه دهیم که یکتایی چگالی‌های انتقال مقید پایدار را تضمین کند. قضیه ۲۷.۴ بیان خواهد کرد که در حالت پایا فرض ۱۷.۴ کافی است. کلید اثبات، گزاره زیر است.

گزاره ۲۶.۴. با شرایط نتیجه ۲۵.۴، در صورتی که برای φ -تقریباً هر مکان x داشته باشیم

$$\psi_x(f_s, t) = \psi_x(f_c, t), \quad \forall t \in [0, \infty]$$

آن‌گاه چگالی انتقال مقید پایدار $(\varphi \otimes \psi)$ -یکتایی برای φ و ψ وجود دارد.

در گزاره فوق منظور از $(\varphi \otimes \psi)$ -یکتا، این است که هر دو چگالی انتقال مقید پایدار $(\varphi \otimes \psi)$ -تقریباً همه جا با هم برابرند.

قضیه ۲۷.۴ (یکتایی). فرض کنید Φ و Ψ دو اندازه تصادفی پایا روی $\mathbb{R}^d$ باشند که تقریباً همیشه در فرض ۱۷.۴ صدق می‌کنند. در این صورت تقریباً همیشه هر دو چگالی انتقال مقید پایدار برای Φ_ω و Ψ_ω ، $(\Phi_\omega \otimes \Psi_\omega)$ -تقریباً همه جا با هم برابرند.

در قضیه فوق منظور ما این است که یک پیشامد با احتمال ۱ وجود دارد که یکتایی در آن پیشامد برقرار است. کاری به این موضوع نداریم که یکتایی یک خاصیت اندازه‌پذیر است یا خیر.

نکته ۲۸.۴. خاصیتی شبیه به گزاره ۲۶.۴ در تطابق‌های پایدار در گراف‌های دو بخشی متناهی وجود دارد: در یک گراف دو بخشی متناهی، همواره لااقل یک تطابق پایدار وجود دارد. به علاوه، تطابق پایدار یکتا است اگر و تنها اگر دو نسخه الگوریتم گیل-شپلی که از دو بخش مختلف آغاز می‌شوند نتیجه یکسانی داشته باشند. همچنین در حالتی که معیار ارجحیت برای همه رئوس بر اساس مقدار یک تابع متقارن مانند d باشد (یعنی رأس v وقتی رأس w_1 را بر w_2 ترجیح دهد که $d(v, w_1) < d(v, w_2)$)، هر دو نسخه الگوریتم گیل-شپلی کمیت $\sum d(v, w)$ که در آن مجموع روی یال‌های تطابق است، را در میان تطابق‌های پایدار، کمینه می‌کنند. به ارتباط این خاصیت با بهینه بودن به معنای نتیجه ۲۵.۴ توجه کنید.

فرض کنید f یک چگالی انتقال وزن‌دار باشد. قلمرو مکان x ناحیه $\{ \xi \in \mathbb{R}^d : f(x, \xi) > 0 \}$ است و قلمرو مرکز ξ ناحیه $\{ x \in \mathbb{R}^d : f(x, \xi) > 0 \}$ است. در قضیه زیر کران‌داری قلمروهای ایجاد شده توسط یک چگالی انتقال مقید پایدار را در حالت پایا بررسی می‌کنیم.

قضیه ۲۹.۴ (کران‌داری). فرض کنید Φ و Ψ اندازه‌های تصادفی پایا روی $\mathbb{R}^d$ باشند که تقریباً همیشه ناصفرند. فرض کنید $F = F_\omega(x, \xi)$ یک تابع هم‌ورد باشد که تقریباً همیشه یک چگالی انتقال مقید پایدار برای (Φ, Ψ) است. در این صورت تقریباً همیشه خواهیم داشت

آ. Φ_ω -تقریباً هر مکان و Ψ_ω -تقریباً هر مرکز دارای قلمرو کران‌دار است.

ب. اجتماع قلمرو مکان‌های (یا به طور مشابه مرکزهای) موجود در یک مجموعه کران‌دار دارای اندازه متناهی تحت Ψ (یا به طور مشابه تحت Φ) است.

برای اثبات قضیه فوق به مفهوم هسته انتقال ورونوی نیاز داریم که آن را در فصل ۶ تعریف می‌کنیم. هرچند اثبات خواص هسته انتقال ورونوی را به همان فصل موکول می‌کنیم، اما با توجه به این که فصل ۶ یک فصل مستقل است، به اثبات قضیه ۲۹.۴ لطمه وارد نمی‌شود.

۵.۴ اثبات‌ها

در این بخش اثبات‌های نتایج فصل ۴ را به همراه چند لم جزئی ارائه می‌کنیم.

نکته ۳۰.۴. طبق تعریف A_n داریم

$$\int_{\mathbb{R}^d} (A_n(x_0, \xi) - R_{n-1}(x_0, \xi)) \psi(d\xi) \leq 1$$

و اگر $a_n(x_0) < \infty$ تساوی برقرار خواهد بود. همچنین، اگر $\psi(\mathbb{R}^d) = \infty$ ، آنگاه با استقرا ثابت می‌شود که $a_n(\cdot) < \infty$ برای هر n . به طور مشابه، طبق تعریف R_n داریم

$$\int_{\mathbb{R}^d} (A_n(x, \xi_0) - R_n(x, \xi_0)) \varphi(dx) \leq 1$$

و اگر $r_n(\xi_0) < \infty$ تساوی برقرار خواهد بود. همچنین، اگر در نامساوی فوق به ازای یک مرحله مثل n تساوی برقرار باشد، آنگاه در همه مراحل بعد نیز تساوی برقرار خواهد بود؛ یعنی ξ از مرحله n به بعد اشباع می‌شود.

اثبات لم ۶.۴. واضح است که $R_1 \geq R_0$. برای $n \geq 2$ ، فرض کنید $R_{n-1} \geq R_{n-2}$. در ادامه نتیجه خواهیم گرفت $A_n \geq A_{n-1}$ ، $a_n \geq a_{n-1}$ ، $r_n \leq r_{n-1}$ و $R_n \geq R_{n-1}$. در این صورت حکم با استقرا ثابت می‌شود. با همین استقرا به سادگی دیده می‌شود که توابع مذکور به صورت اندازه‌پذیر و هم‌ورد به φ و ψ بستگی دارند. چون $1 - R_{n-1} \leq 1 - R_{n-2}$ ، (۱.۴) نتیجه می‌دهد $a_n(x_0) \geq a_{n-1}(x_0)$. اگر داشته باشیم $a_n(x_0) > a_{n-1}(x_0)$ یا $a_n(x_0) = \infty$ ، آنگاه از تعریف A_n واضح است که $A_n(x_0, \cdot) \geq A_{n-1}(x_0, \cdot)$. پس فرض کنید $a_n(x_0) = a_{n-1}(x_0) =: t < \infty$ از (۱.۴) و (۲.۴) نتیجه می‌گیریم

$$c_n(x_0) = 1 - \frac{1 - \int_{B^0} (1 - R_{n-1}(x_0, \xi)) \psi(d\xi)}{\int_{\partial B} (1 - R_{n-1}(x_0, \xi)) \psi(d\xi)}, \quad (۶.۴)$$

که در آن قرارداد می‌کنیم $B = B_{a_n(x_0)}(x_0)$ و $\emptyset := \emptyset$. این رابطه به همراه رابطه $R_{n-1} \geq R_{n-2}$ نتیجه می‌دهند $c_n(x_0) \leq c_{n-1}(x_0)$ و بنابراین $A_n(x_0, \cdot) \geq A_{n-1}(x_0, \cdot)$. با داشتن (۳.۴)، نتیجه می‌دهد $r_n(\xi_0) \leq r_{n-1}(\xi_0)$. اثبات این که $r_n \leq r_{n-1}$ نتیجه می‌دهد $R_n \geq R_{n-1}$ نیز کاملاً مشابه فوق است. $\square$

لم ۳۱.۴. با در نظر داشتن چگالی انتقال مکان-بهینه، اگر مکان x_0 مرکز ξ_0 را بخواهد، آنگاه برای n به اندازه کافی بزرگ داریم $A_n(x_0, \xi_0) = 1$. همچنین اگر مرکز ξ_0 مکان x_0 را بخواهد، آنگاه برای هر n داریم $R_n(x_0, \xi_0) = 0$.

اثبات. فرض کنید x_0, ξ_0 را بخواهد. اگر مرکزی مثل ξ_1 باشد که $|\xi_1 - x_0| > |\xi_0 - x_0|$ و $f(x_0, \xi_1) > 0$ ، آنگاه x_0 به ξ_1 درخواست داده است و بنابراین به تمام نقاط نزدیک‌تر با وزن ۱ درخواست داده است. پس همان طور که مطلوب است، x_0 با وزن ۱ به ξ_0 درخواست داده است. در حالت دیگر، x_0 ناراضی است. کافی است نشان دهیم برای n به اندازه کافی بزرگ داریم $a_n(x_0) > |x_0 - \xi_0|$. اگر این طور نباشد، آنگاه با توجه به این که برای هر n داریم $a_n(x_0) < \infty$ ، نکته ۳۰.۴ نتیجه می‌دهد.

$$\int_{\mathbb{R}^d} (A_n(x_0, \xi) - R_{n-1}(x_0, \xi)) \psi(d\xi) = 1.$$

چون $a_n(x_0) < |x_0 - \xi_0|$ تابع $A_n(x_0, \cdot) - R_{n-1}(x_0, \cdot)$ محدود به $B_{|x_0 - \xi_0|}(x_0)$ است. این تابع نسبت به ψ انتگرال‌پذیر است زیرا ψ موضعاً متناهی است. بنابراین قضیه همگرایی تسلطی لبگ نتیجه می‌دهد که $\int_{\mathbb{R}^d} f_s(x_0, \xi) \psi(d\xi) = 1$ ؛ یا معادلاً x_0 راضی است. این یک تناقض است. حال فرض کنید ξ_0, x_0 را می‌خواهد. اگر ξ_0 اشباع نشده باشد، هیچ وزنی را رد نکرده است و حکم برقرار است. پس فرض کنید یک مکان x_1 وجود دارد که $|x_0 - \xi_0| > |x_1 - \xi_0|$ و $f(x_1, \xi_0) > 0$. بنابراین برای هر n خواهیم داشت $|x_1 - \xi_0| \geq r_n(\xi_0)$ ، زیرا در غیر این صورت با توجه به غیر نزولی بودن شعاع رد، ξ_0 در تمام مراحل بعد از n تمام وزن درخواستی x_1 را رد می‌کرد. بنابراین برای هر n داریم $r_n(\xi_0) > |x_0 - \xi_0|$ پس ξ_0 هیچ وزن درخواستی از x_0 را رد نکرده است. $\square$

اثبات قضیه ۱۵.۴. طبق لم ۶.۴ نتیجه می‌گیریم که f_s به طور اندازه‌پذیر و هم‌ورد به φ و ψ بستگی دارد. داریم

$$f_s = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n - R_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n - R_n.$$

به‌علاوه، $A_n \geq R_n$ و $A_n \geq R_{n-1}$. بنابراین از نکته ۳۰.۴ و لم فاتو^{۲۱} نتیجه می‌شود که f_s یک چگالی انتقال شبه موازنه‌گر است. هم‌چنین f_s مقید است زیرا $f_s \leq 1$. حال فرض کنید f_s ناپایدار باشد. پس یک مکان x_0 و یک مرکز ξ_0 یافت می‌شوند که یکدیگر را بخواهند. از لم ۳۱.۴ نتیجه می‌گیریم که برای n به اندازه کافی بزرگ داریم $A_n(x_0, \xi_0) = 1$ و $R_n(x_0, \xi_0) = 0$ بنابراین $f_s(x_0, \xi_0) = 1 - 0 = 1$ و این یک تناقض است. $\square$

لم ۳۲.۴. فرض کنید f یک چگالی انتقال مقید پایدار برای φ و ψ باشد (تعریف ۱۴.۴). X' را مجموعه مکان‌های ناراضی و Ξ' را مجموعه مرکزهای اشباع نشده بگیرید. اگر $X' \neq \emptyset$ ، آنگاه خواهیم داشت $\psi(\Xi') < 1$ و اگر $\Xi' \neq \emptyset$ ، آنگاه خواهیم داشت $\varphi(X') < 1$. به عنوان یک نتیجه، لااقل یکی از $\varphi(X')$ و $\psi(\Xi')$ کمتر از یک است.

اثبات. ابتدا فرض کنید $X' \neq \emptyset$ و $\psi(\Xi') \geq 1$. مکان دلخواه $x_0 \in X'$ را در نظر بگیرید. چون x_0 ناراضی است و $\psi(\Xi') \geq 1$ ، مکان $\xi_0 \in \Xi'$ یافت می‌شود که $f(x_0, \xi_0) < 1$. حال (x_0, ξ_0) یک زوج ناپایدار است، زیرا x_0 ناراضی و ξ_0 اشباع نشده است. این با پایداری f متناقض است. به طور مشابه ثابت می‌شود که اگر $\Xi' \neq \emptyset$ آنگاه $\varphi(X') < 1$. $\square$

حالت‌هایی وجود دارند که هر دو مجموعه X' و Ξ' در اثبات لم ۳۲.۴ اندازه مثبت داشته باشند. مثال ۳۸.۴ چنین حالتی را نشان می‌دهد.

لم ۳۳.۴. فرض کنید Φ و Ψ دو اندازه تصادفی پایا روی $\mathbb{R}^d$ با شدت‌های λ_Φ و λ_Ψ باشند. برای هر چگالی انتقال وزن‌دار هم‌ورد مثل $F = F_\omega(x, \xi)$ داریم

$$\lambda_\Phi \mathbb{E}_\Phi [\Psi_\circ(F, t)] = \lambda_\Psi \mathbb{E}_\Psi [\Phi^\circ(F, t)]. \quad (۷.۴)$$

^{۲۱}Fatou's lemma

اثبات. این لم نتیجه مستقیم حالت ساده اصل انتقال جرم (نتیجه ۳۳.۱) است. $\square$

اثبات قضیه ۱۶.۴. تحدید Φ و Ψ به ترتیب به مجموعه مکان‌های ناراضی و مرکزهای اشباع نشده را Φ_1 و Ψ_1 بنامید. با توجه به این که F هم‌ورد است، Φ_1 و Ψ_1 نیز اندازه‌های تصادفی ارگودیک هستند. با توجه به تعریف ۲۰.۴ تعریف کنید

$$U_x(F) := 1 - \Psi_x(F, \infty),$$

$$U^\xi(F) := 1 - \Phi^\xi(F, \infty).$$

لم ۳۳.۴ به ازای $t = \infty$ نتیجه می‌دهد که

$$\lambda_\Phi \mathbb{E}_\Phi [1 - U_\circ(F)] = \lambda_\Psi \mathbb{E}_\Psi [1 - U^\circ(F)].$$

بنابراین

$$\lambda_\Phi \mathbb{E}_\Phi [U_\circ(F)] - \lambda_\Psi \mathbb{E}_\Psi [U^\circ(F)] = \lambda_\Phi - \lambda_\Psi. \quad (۸.۴)$$

طبق رابطه (۱.۱)، اگر B را یک مکعب دلخواه در $\mathbb{R}^d$ بگیریم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \lambda_\Phi \mathbb{E}_\Phi [U_\circ(F)] &= \frac{1}{\mathcal{L}_d(B)} \mathbb{E} \left[\int_B U_\circ(F_{\theta_s}) \Phi(ds) \right] \\ &= \frac{1}{\mathcal{L}_d(B)} \mathbb{E} \left[\int_B U_s(F) \Phi(ds) \right] \\ &= \frac{1}{\mathcal{L}_d(B)} \mathbb{E} \left[\int_B U_s(F) \Phi_1(ds) \right], \end{aligned}$$

که در آن رابطه آخر از $\Phi_1 = 1_{\{U_s(F) > \circ\}} \Phi$ نتیجه می‌شود. از طرف دیگر، با توجه به این که $U_s(F)$ کران‌دار و Φ_1 ارگودیک است، داریم

$$\begin{cases} \mathbb{E}_\Phi [U_\circ(F)] = \circ \Leftrightarrow \mathbb{E} [\Phi_1(B)] = \circ \Leftrightarrow \Phi_1(\mathbb{R}^d) = \circ, \text{ a.s.} \\ \mathbb{E}_\Phi [U_\circ(F)] > \circ \Leftrightarrow \mathbb{E} [\Phi_1(B)] > \circ \Leftrightarrow \Phi_1(\mathbb{R}^d) = \infty, \text{ a.s.} \end{cases} \quad (۹.۴)$$

به طور مشابه

$$\begin{cases} \mathbb{E}_\Psi [U^\circ(F)] = \circ \Leftrightarrow \mathbb{E} [\Psi_1(B)] = \circ \Leftrightarrow \Psi_1(\mathbb{R}^d) = \circ, \text{ a.s.} \\ \mathbb{E}_\Psi [U^\circ(F)] > \circ \Leftrightarrow \mathbb{E} [\Psi_1(B)] > \circ \Leftrightarrow \Psi_1(\mathbb{R}^d) = \infty, \text{ a.s.} \end{cases} \quad (۱۰.۴)$$

می‌دانیم F تقریباً همیشه پایدار است. بنابراین لم ۲۲.۴ نتیجه می‌دهد که تقریباً همیشه لااقل یکی از دو نامساوی $\Phi_1(\mathbb{R}^d) < \infty$ و $\Psi_1(\mathbb{R}^d) < \infty$ برقرار است. طبق ارگودیک بودن، لااقل یکی از این دو نامساوی تقریباً

همیشه برقرار است. بنابراین طبق (۹.۴) و (۱۰.۴)، یا $\mathbb{E}_\Phi[U_\circ(F)] = \circ$ و یا $\mathbb{E}_\Psi[U^\circ(F)] = \circ$ برقرار است. با جایگذاری این نتیجه در (۸.۴) به دست می‌آوریم

$$\begin{cases} \mathbb{E}_\Phi[U_\circ(F)] = \max\{\circ, 1 - \frac{\lambda_\Psi}{\lambda_\Phi}\}, \\ \mathbb{E}_\Psi[U^\circ(F)] = \max\{\circ, 1 - \frac{\lambda_\Phi}{\lambda_\Psi}\}. \end{cases} \quad (11.4)$$

این روابط به همراه (۹.۴) و (۱۰.۴) اثبات را کامل می‌کنند. $\square$

اثبات قضیه ۹.۴. طبق لم ۶.۴، چگالی انتقال مکان-بهینه برای Φ و Ψ هم‌ورد است. هم‌چنین طبق قضیه ۱۵.۴ یک چگالی انتقال مقید پایدار نیز هست. توجه کنید که موازنه‌گر بودن چگالی انتقال مکان-بهینه یک پیشامد است؛ یعنی یک زیرمجموعه اندازه‌پذیر از Ω (زیرا کافی است شمارا مجموعه بول برای آزمایش موازنه‌گر بودن در نظر بگیریم). پس طبق قضیه تجزیه ارگودیک کافی است فرض کنیم Φ و Ψ ارگودیک هستند (نتیجه ۲۸.۲ را ببینید). حال حکم نتیجه مستقیم قسمت آ از قضیه ۱۶.۴ است. $\square$

اثبات قضیه ۱۰.۴. حکم نتیجه مستقیم قضیه‌های ۹.۴، ۱۱.۲ و ۱۳.۲ و نکته ۲۸.۱ است. $\square$

اثبات گزاره ۱۹.۴. فرض کنید φ به همه ابرصفحه‌ها و مرز همه گوی‌ها اندازه صفر نسبت می‌دهد. بنابراین برای هر گوی B داریم $\varphi(\partial B) = \circ$. بنابراین (۵.۴) برای هر مرکز ξ برقرار است. به ازای $\circ \leq k < d$ ، منظور از یک کره k -بعدی تقاطع مرز یک گوی در $\mathbb{R}^d$ با یک زیرفضای آفین غیر مماس از بعد $k+1$ است. به عنوان مثال، یک گوی صفر بعدی یک جفت نقطه متمایز است. یک کره k -بعدی S را بد می‌نامیم هرگاه برای هر نقطه s داشته باشیم $\psi(S \setminus \{s\}) > \circ$. به عبارت دیگر، مرز S را بتوان به دو زیرمجموعه با اندازه مثبت افراز کرد. یک کره بد را مینیمال می‌گوییم هرگاه هیچ کره بد دیگری زیرمجموعه آن نباشد. اگر (۴.۴) به ازای یک مکان مثل x برقرار نباشد، آن‌گاه یک کره بد مینیمال وجود دارد که x از همه نقاط آن هم‌فاصله است. با توجه به این که مجموعه نقاط هم‌فاصله از نقاط یک کره یک زیرفضای آفین سره از $\mathbb{R}^d$ است، کافی است نشان دهیم تعداد کره‌های بد مینیمال شمارا است. مجموعه اتم‌های ψ را T بنامید. چون ψ موضعاً متناهی است، T شمارا است. کره‌های بد صفر بعدی همان جفت اتم‌ها هستند که شمارا هستند. هم‌چنین هر کره بد مینیمال با بعد مثبت مثل S حداکثر یک اتم دارد و بنابراین $\psi(S \setminus T) > \circ$. فرض کنید تعداد ناشمارایی از کره‌های بد مینیمال وجود داشته باشد. بنابراین $R > \circ$ ، $\epsilon > \circ$ و تعدادی نامتناهی از کره‌های بد مینیمال $S_1, S_2, S_3, \dots$ یافت می‌شوند که $S_i \subseteq B_R(\circ)$ و $\psi(S_i \setminus T) > \epsilon$. به ازای $j \neq i$ ، با توجه به این که $S_i \cap S_j$ یک کره بد نیست، داریم $\psi((S_i \setminus T) \cap (S_j \setminus T)) = \circ$. بنابراین $\psi(B_R(\circ)) \geq \sum_i \psi(S_i \setminus T) = \infty$ ، و این یک تناقض است. $\square$

اثبات گزاره ۲۲.۴. اثبات نتیجه مستقیمی از (۱۱.۴) و قضیه ارگودیک بیرکف (قضیه ۱۳.۱) است. $\square$

اثبات قضیه ۲۳.۴. توابع موجود در الگوریتم ۵.۴ را در نظر بگیرید. ابتدا به استقرا ثابت می‌کنیم $A'_n \geq A_n$ (برای $n > \circ$) و $R'_n \geq R_n$ برای $n = \circ$ ، طبق فرض داریم $R'_\circ = R_\circ = \circ$. حال فرض کنید حکم برای $n-1$

درست است. فرض استقرا و (۱.۴) نتیجه می‌دهند که $a_n \leq a'_n$. در صورتی که $a_n(x_0) < a'_n(x_0)$ ، واضح است که $A_n(x_0, \cdot) \leq A'_n(x_0, \cdot)$. حال فرض کنید $a_n(x_0) = a'_n(x_0)$. از (۶.۴) نتیجه می‌گیریم $c_n(x_0)$ بزرگ‌تر یا مساوی ضریب متناظر در تعریف $A'_n(x_0, \cdot)$ است. حال طبق تعریف A_n باز هم نتیجه می‌شود که $A_n \leq A'_n$. سپس، (۲.۴) نتیجه می‌دهد که $r_n \geq r'_n$. به طور مشابه، با در نظر گرفتن دو حالت نامساوی اکید و تساوی، نتیجه می‌گیریم $R_n \leq R'_n$ و حکم استقرا ثابت می‌شود.

با حد گرفتن از نامساوی‌هایی که ثابت کردیم، نتیجه می‌شود $A' \geq A$ و $R' \geq R$. حال با توجه به این که $A(x_0, \xi_0) = 1$ طبق فرض، داریم $A(x_0, \xi_0) = 1$ و $R' \geq R$ که در بالا ثابت کردیم، نتیجه می‌گیریم

$$f_s(x_0, \xi_0) = A(x_0, \xi_0) - R(x_0, \xi_0) = 1 - R(x_0, \xi_0) \geq A'(x_0, \xi_0) - R'(x_0, \xi_0) = f'_s(x_0, \xi_0).$$

(ب). کافی است برای $t < \infty$ حکم را ثابت کنیم. فرض کنید $\nu_{x_0}(f'_s, t) > \psi_{x_0}(f_s, t)$. با توجه به این که $\psi_{x_0}(f_s, t) < 1$ پس یا x_0 ناراضی است (تحت f_s) یا $f_s(x_0, \cdot)$ در جایی خارج از $B_t(x_0)$ مقدار مثبت به خود می‌گیرد. در هر دو حالت نتیجه می‌شود که x_0 به تمام مرکزهای عضو $B_t(x_0)$ با وزن ۱ درخواست داده است (برای حالت اول از لم ۳۱.۴ استفاده کنید و برای حالت دوم توجه کنید که x_0 به نقطه‌ای خارج از آن گوی درخواست داده است). پس طبق قسمت (آ)، روی $B_t(x_0)$ داریم $f'_s(x_0, \cdot) \leq f_s(x_0, \cdot)$. با توجه به این که $\nu \leq \psi$ ، نتیجه می‌گیریم که $\nu_{x_0}(f, t) \leq \psi_{x_0}(f_s, t)$ که با فرض خلف متناقض است.

(پ). کافی است برای $t < \infty$ حکم را ثابت کنیم. فرض کنید برای مقادیر مفروض ξ_0 و $t < \infty$ حکم برقرار نباشد؛ یعنی

$$\mu^\xi(f'_s, t) < \varphi^\xi(f_s, t) \leq 1.$$

بنابراین از تعریف دو طرف نامساوی و فرض $\mu \geq \varphi$ نتیجه می‌شود که مکان $x_0 \in B_t(\xi_0)$ وجود دارد که $f'_s(x_0, \xi_0) < f_s(x_0, \xi_0)$. در ابتدای اثبات ثابت کردیم $A' \geq A$. پس نتیجه می‌شود $R'(x_0, \xi_0) > R(x_0, \xi_0)$. به طور خاص، ξ_0 در مرحله‌ای از تعریف f'_s ، مقداری از وزن x_0 را رد کرده است. بنابراین طبق نزولی بودن شعاع رد (لم ۶.۴)، از آن مرحله به بعد، در هر مرحله مانند n خواهیم داشت

$$\int_B [A'_n - R'_n](\cdot, \xi_0) d\mu(\cdot) = 1$$

که در آن $B := B_{|x_0 - \xi_0|}(x_0)$. با میل دادن n به ∞ و قضیه همگرایی تسلطی لبگ نتیجه می‌گیریم که $\mu^\xi(f'_s, |x_0 - \xi_0|) = 1$ در نتیجه $\mu^\xi(f'_s, t) = 1$ که این با فرض خلف متناقض است.

□

اثبات قضیه ۲۴.۴. (آ) فرض کنید گزاره نادرست است و n را اولین مرحله‌ای بگیرید که به ازای مجموعه‌ای از زوج‌های (x, ξ) با اندازه مثبت (نسبت به $\mu \otimes \psi$) داشته باشیم $f(x, \xi) + R_n(x, \xi) > 1$. با استفاده از قضیه

فوبینی^{۲۲} و فرض ۱۷.۴ برای μ و ψ می‌توانیم مجموعه‌ای مانند Ξ_1 بیابیم به طوری که $\psi(\Xi_1) > 0$ و برای هر مرکز $\xi_0 \in \Xi_1$ ، مجموعه

$$T := T_{\xi_0} := \{x : f(x, \xi_0) + R_n(x, \xi_0) > 1\}$$

اندازه مثبت نسبت به μ داشته باشد و

$$\forall r > 0, \exists s \in \partial B_r(\xi_0) : \mu(\partial B_r(\xi_0) \setminus \{s\}) = 0. \quad (12.4)$$

طبق تعریف T ، برای هر $x \in T$ داریم $0 \leq f(x, \xi_0) + R_n(x, \xi_0) < 1$. بنابراین ξ_0 در مرحله n -ام مقدار ناصفری از وزن‌های درخواستی همه مکان‌های T را رد کرده است. پس ξ_0 در مرحله n -ام اشباع شده است. پس اگر قرار دهیم $B := B_{\xi_0} := B_{r_n(\xi_0)}$ ، خواهیم داشت

$$\int_B A_n(x, \xi_0) - R_n(x, \xi_0) \varphi(dx) = 1 \quad (13.4)$$

و به علاوه، T از درون B مجزا است. با توجه به این که $\int_{\mathbb{R}^d} f(x, \xi_0) \mu(dx) \leq 1$ و $\mu \geq \varphi$ (۱۳.۴) نتیجه می‌دهد

$$\int_B [A_n - R_n - f](x, \xi_0) \varphi(dx) \geq 0. \quad (14.4)$$

برای ادامه اثبات به کم‌ترین نیاز داریم.

۳۴.۴. مجموعه $B'_{\xi_0} \subseteq B$ با اندازه مثبت نسبت به φ وجود دارد به طوری که برای هر $x \in B'_{\xi_0}$ داشته باشیم

$$[A_n - R_n - f](x, \xi_0) > 0. \quad 1.$$

۲. فاصله ξ_0 از x کمتر از فاصله ξ_0 تا لااقل یک عضو T است.

برای اثبات کم‌ترین سه حالت در نظر می‌گیریم. توجه کنید که اگر μ نسبت به اندازه لبگ مطلقاً پیوسته باشد، فقط حالت اول رخ می‌دهد.

حالت اول: فرض کنید $\mu(T \cap \partial B) = 0$ و بنابراین $\mu(T \setminus B) > 0$. چون $\mu(T) > 0$ و برای هر $x \in T$ داریم $0 \leq f(x, \xi_0) + R_n(x, \xi_0) < 1$ ، خواهیم داشت $\int_T f(x, \xi_0) \mu(dx) > 0$. بنابراین، طبق فرض این حالت به دست می‌آوریم

$$\int_B f(x, \xi_0) \mu(dx) \leq 1 - \int_T f(x, \xi_0) \mu(dx) < 1.$$

^{۲۲}Fubini's theorem

پس نامساوی موجود در (۱۴.۴) اکید است. پس عامل انتگرال روی مجموعه‌ای با اندازه مثبت (نسبت به φ) مثبت است، که همان مجموعه مطلوب است.

حالت دوم: فرض کنید $\mu(T \cap \partial B) > 0$ اما $\varphi(T \cap \partial B) = 0$. از (۱۲.۴) به دست می‌آوریم $\mu(\partial B \setminus T) = 0$ و بنابراین $\varphi(\partial B \setminus T) = 0$. پس $\varphi(\partial B) = 0$ و در (۱۳.۴) و (۱۴.۴) می‌توانیم به جای B° ، B را قرار دهیم. حال با توجه به این که $B^\circ \cap T = \emptyset$ ، دقیقاً مشابه حالت قبل ادعا ثابت می‌شود.

حالت سوم: فرض کنید $\varphi(T \cap \partial B) > 0$. با توجه به این که روی $T \times \{\xi_0\}$ داریم $f + R_n > 1$ ، به دست می‌آوریم

$$\int_{T \cap \partial B} [A_n - R_n - f](x, \xi_0) \varphi(dx) < 0.$$

از طرف دیگر، (۱۲.۴) نتیجه می‌دهد $\varphi(\partial B \setminus T) = 0$. حال از (۱۴.۴) به دست می‌آوریم

$$\int_{B^\circ} [A_n - R_n - f](x, \xi_0) \varphi(dx) > 0.$$

بنابراین عامل انتگرال روی مجموعه‌ای با اندازه مثبت (نسبت به φ) مثبت است، که همان مجموعه مطلوب است. پس لم ۳۴.۴ به طور کامل ثابت شده است.

حال به ادامه اثبات قضیه می‌پردازیم. به ازای $x \in B'_{\xi_0}$ ، قسمت (۱) از لم ۳۴.۴ نتیجه می‌دهد $f(x, \xi_0) < 1$. طبق تعریف T ، روی T خواهیم داشت $f(\cdot, \xi_0) > 0$. بنابراین از قسمت (۲) از لم ۳۴.۴ نتیجه می‌شود که ξ_0 ، x را می‌خواهد (نسبت به f)؛ یعنی ξ_0 تمام مکان‌های B'_{ξ_0} را می‌خواهد. از قضیه فوبینی برای مجموعه $\{(x, \xi) : \xi \in \Xi_1, x \in B'_{\xi}\}$ و فرض ۱۷.۴ برای μ و ψ نتیجه می‌گیریم که مکان x_0 وجود دارد به طوری که مجموعه

$$\Xi_2 := \{\xi \in \Xi_1 : x_0 \in B'_{\xi}\}$$

اندازه مثبت نسبت به ψ داشته باشد و

$$\forall r > 0, \exists s \in \partial B_r(x_0) : \psi(\partial B_r(x_0) \setminus \{s\}) = 0. \quad (15.4)$$

توجه کنید که B'_{ξ_0} بر اساس چند نامساوی ساخته شده است. پس مجموعه فوق اندازه‌پذیر است و قضیه فوبینی در اینجا معتبر است. B_1 را کوچک‌ترین گویی به مرکز x_0 (که شعاع آن می‌تواند بی‌نهایت باشد) بگیرید که شامل Ξ_2 است. قسمت (۱) از لم ۳۴.۴ نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} 1 - R_{n-1}(x_0, \xi) &\geq [A_n - R_{n-1}](x_0, \xi) \\ &\geq [A_n - R_n](x_0, \xi) \\ &> f(x_0, \xi) \geq 0, \quad \forall \xi \in \Xi_2. \end{aligned} \quad (16.4)$$

در نتیجه x_0 در مرحله n -ام به همه مرکزهای Ξ_2 درخواست داده است. بنابراین روی B_1° داریم $A_n(x_0, \cdot) \equiv 1$. به علاوه، طبق نحوه انتخاب n می‌توانستیم از ابتدا x_0 را طوری انتخاب کنیم که ψ -تقریباً همه جا داشته باشیم بنابراین $f(x_0, \cdot) + R_{n-1}(x_0, \cdot) \leq 1$

$$\forall \xi \in B_1^\circ : [A_n - R_{n-1}](x_0, \xi) \geq f(x_0, \xi). \quad (17.4)$$

اگر $\psi(\Xi_2 \cap B_1^\circ) > 0$ ، (16.4) و (17.4) نتیجه می‌دهند که

$$\int_{B_1^\circ} f(x_0, \xi) \nu(d\xi) < \int_{B_1^\circ} [A_n - R_{n-1}](x_0, \xi) \psi(d\xi) \leq 1,$$

که در آن نامساوی دوم نتیجه‌ای از تعریف A_n است. بنابراین، طبق نکته 21.4 به دست می‌آوریم که تمام مرکزهای عضو $\Xi_2 \cap B_1^\circ$ را می‌خواهد (نسبت به f). حال یک جفت ناپایدار برای f پیدا کرده‌ایم و این یک تناقض است. حال فرض کنید $\psi(\Xi_2 \cap B_1^\circ) = 0$. پس باید داشته باشیم $\psi(\Xi_2 \cap \partial B_1) > 0$. پس طبق (15.4) داریم $\psi(\partial B_1 \setminus \Xi_2) = 0$ و مانند قبل به دست خواهیم آورد

$$\int_{B_1} f(x_0, \xi) \nu(d\xi) < \int_{B_1} [A_n - R_{n-1}](x_0, \xi) \psi(d\xi) \leq 1.$$

پس x_0 تمام مرکزهای عضو $\Xi_2 \cap \partial B_1$ را می‌خواهد (نسبت به f) و این یک تناقض است. (ب) اگر x به طور کامل به ξ درخواست دهد؛ یعنی اگر $A(x, \xi) = 1$ ، آنگاه طبق تعریف f_s به دست می‌آوریم $f_s(x, \xi) = 1 - R(x, \xi)$. حال ادعا نتیجه‌ای مستقیم از قسمت (آ) است.

(پ) فرض کنید X مجموعه مکان‌هایی مثل x باشد به طوری که برای ψ -تقریباً هر ξ ، ادعای قسمت (ب) برای (x, ξ) برقرار است. طبق (ب) داریم $\mu(X^c) = 0$. ثابت می‌کنیم تمام مکان‌های عضو X در خاصیت مطلوب صدق می‌کنند. فرض کنید $x_0 \in X$ اما $\psi_{x_0}(f_s, t) > \nu_{x_0}(f, t)$. بنابراین $\psi_{x_0}(f_s, t) < 1$. در نتیجه یا x_0 ناراضی (نسبت به f_s) است و یا $f_s(x_0, \cdot)$ در جایی خارج از $B_t(x_0)$ مقدار مثبت به خود می‌گیرد. با توجه به این که f_s از الگوریتم مکان-بهینه به دست آمده است، در هر دو حالت x_0 به تمام مرکزهای عضو $B_t(x_0)$ با وزن ۱ درخواست داده است (برای حالت اول از لم 31.4 استفاده کنید و برای حالت دوم توجه کنید که x_0 به نقطه‌ای خارج از آن گوی درخواست داده است). تعریف X الزام می‌کند که ψ -تقریباً همه جا روی $B_t(x_0)$ داشته باشیم $f(x_0, \cdot) \leq f_s(x_0, \cdot)$. با توجه به این که $\nu \leq \psi$ ، نتیجه می‌گیریم که $\nu_{x_0}(f, t) \leq \psi_{x_0}(f_s, t)$ که یک تناقض است.

(ت) با توجه به این که $\mu^\xi(f, \cdot)$ و $\varphi^\xi(f_s, \cdot)$ توابعی از راست پیوسته هستند، کافی است حکم را برای t های گویا ثابت کنیم. اگر این ادعا درست نباشد، می‌توانیم $t \in [0, \infty]$ و $S \subseteq \mathbb{R}^d$ را بیابیم به طوری که $\psi(S) > 0$ و $\mu^\xi(f, t) < \varphi^\xi(f_s, t)$ به ازای هر $\xi \in S$. عضو $\xi_0 \in S$ را به دلخواه انتخاب کنید. چون $\mu \geq \varphi$ ، مجموعه مکان‌های

$$T_{\xi_0} := \{x \in B_t(\xi_0) : f(x, \xi_0) < f_s(x, \xi_0)\}$$

اندازه مثبت نسبت به μ دارد. به علاوه، $\mu^\xi(f, t) < 1$ و روی مجموعه T_ξ داریم $f(\cdot, \xi) < 1$. بنابراین نکته ۲۱.۴ نتیجه می‌دهد که ξ تمام مکان‌های T_ξ را می‌خواهد (نسبت به f). نشان خواهیم داد که ξ را می‌توان از ابتدا طوری انتخاب کرد که عضوی از T_ξ نیز ξ را بخواهد (نسبت به f) و یک تناقض حاصل می‌شود. فرض ۱۷.۴ برای μ و ψ ، (ب) و قضیه فوبینی برای مجموعه $\{(x, \xi) : \xi \in S, x \in T_\xi\}$ (که مجموعه‌ای اندازه‌پذیر است) نتیجه می‌دهند که مکانی مثل x_0 وجود دارد که

۱. رابطه (۱۵.۴) برقرار باشد،

۲. حکم (ب) به ازای $x = x_0$ و ψ -تقریباً هر ξ برقرار باشد،

۳. و $\psi(C) > 0$ که در آن $C = \{\xi \in S : x_0 \in T_\xi\}$.

در واقع، این شرایط برای μ -تقریباً هر x_0 برقرارند. کوچک‌ترین گوی به مرکز x_0 (که شعاع آن می‌تواند بی‌نهایت باشد) که شامل C است را B بنامید. از این که روی C نامساوی $f_s(x_0, \cdot) > f(x_0, \cdot) \geq 0$ برقرار است نتیجه می‌گیریم که x_0 به مرکزهای عضو B° با وزن کامل درخواست داده است. بنابراین (۲) نتیجه می‌دهد که

$$f(x_0, \cdot) \leq f_s(x_0, \cdot), \quad \psi|_{B^\circ} - \text{a.e.}$$

حالت اول: $\psi(C \cap B^\circ) > 0$. طبق رابطه فوق خواهیم داشت

$$\int_{B^\circ} f(x_0, \xi) \psi(d\xi) < \int_{B^\circ} f_s(x_0, \xi) \psi(d\xi).$$

بنابراین $\int_{B^\circ} f(x_0, \xi) \nu(d\xi) < 1$. پس طبق نکته ۲۱.۴، x_0 تمام مرکزهای $C \cap B^\circ$ را می‌خواهد (نسبت به f). حال یک زوج ناپایدار برای f یافته‌ایم و این یک تناقض است. حالت دوم: $\psi(C \cap B^\circ) = 0$. بنابراین $\psi(C \cap \partial B) > 0$ از (۱) به دست می‌آوریم $\psi(\partial B \setminus C) = 0$. از این که روی C نامساوی $f_s(x_0, \cdot) > f(x_0, \cdot)$ برقرار است، مشابه قبل نتیجه می‌گیریم

$$\int_B f(x_0, \xi) \psi(d\xi) < \int_B f_s(x_0, \xi) \psi(d\xi).$$

بنابراین $\nu_{x_0}(f, s) < 1$ ، که در آن s شعاع B است. پس طبق نکته ۲۱.۴، x_0 مرکزهای $C \cap \partial B$ را می‌خواهد (نسبت به f) و باز هم به تناقض می‌رسیم. $\square$

اثبات گزاره ۲۶.۴. فرض کنید f یک چگالی انتقال مقید پایدار دلخواه برای φ و ψ باشد. طبق نتیجه ۲۵.۴، برای φ -تقریباً هر مکان x داریم

$$\psi_x(f_s, t) = \psi_x(f, t), \quad \forall t \in [0, \infty]. \quad (۱۸.۴)$$

با استفاده از این رابطه به ازای $t < a_s(x)$ (که در آن $a_s(x)$ شعاع درخواست x در الگوریتم مکان-بهینه است) و قسمت (ب) از قضیه ۲۴.۴ به دست می‌آوریم که برای $(\varphi \otimes \psi)$ -تقریباً هر (x, ξ) ، اگر $|x - \xi| < a_s(x)$ ، آنگاه $f_s(x, \xi) = f(x, \xi)$. فرض ۱۷.۴ و (۱۸.۴) به ازای $t = a_s(x)$ نتیجه می‌دهند که همین خاصیت به ازای $|x - \xi| = a_s(x)$ نیز معتبر است؛ یعنی برای $(\varphi \otimes \psi)$ -تقریباً هر (x, ξ) ، اگر $|x - \xi| \leq a_s(x)$ ، آنگاه $f_s(x, \xi) = f(x, \xi)$. با توجه به این که خارج از $B_{a_s(x)}(x)$ داریم $f_s(x, \cdot) \equiv 0$ ، می‌توانیم از (۱۸.۴) به ازای $t = \infty$ نتیجه بگیریم که $(\varphi \otimes \psi)$ -تقریباً همه جا داریم $f_s = f$ و اثبات کامل می‌شود. $\square$

اثبات قضیه ۲۷.۴. باید ثابت کنیم تقریباً همیشه هر دو چگالی انتقال مقید پایدار همه جا برابرند مگر روی یک مجموعه $(\Phi_\omega \otimes \Psi_\omega)$ -اندازه صفر. فرض کنید f_c و f_s به ترتیب چگالی انتقال مکان-بهینه و مرکز-بهینه باشند. از طرفین نتیجه ۲۵.۴ امید ریاضی می‌گیریم و با اعمال لم ۳۳.۴ به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \lambda_\Phi \mathbb{E}_\Phi [\Psi_\circ(f_s, t)] &\geq \lambda_\Phi \mathbb{E}_\Phi [\Psi_\circ(f_c, t)] = \lambda_\Psi \mathbb{E}_\Psi [\Phi^\circ(f_c, t)] \\ &\geq \lambda_\Psi \mathbb{E}_\Psi [\Phi^\circ(f_s, t)] = \lambda_\Phi \mathbb{E}_\Phi [\Psi_\circ(f_s, t)]. \end{aligned}$$

بنابراین همه نامساوی‌ها در این روابط در واقع تساوی هستند. پس

$$\mathbb{E}_\Phi [\Psi_\circ(f_s, t) - \Psi_\circ(f_c, t)] = 0.$$

با استدلالی شبیه (۹.۴) به دست می‌آوریم

$$\mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \Psi_x(f_s, t) - \Psi_x(f_c, t) \Phi(dx) \right] = 0.$$

طبق نتیجه ۲۵.۴، عامل انتگرال نامنفی است. پس به ازای هر t داده شده، تقریباً همیشه داریم که به ازای Φ_ω -تقریباً هر $x \in \mathbb{R}^d$

$$\Psi_x(f_s, t) = \Psi_x(f_c, t).$$

با استفاده از این رابطه برای t های گویا و این که $\Psi_x(f_s, \cdot)$ و $\Psi_x(f_c, \cdot)$ توابعی از راست پیوسته هستند، به دست می‌آوریم که تقریباً همیشه برای Φ_ω -تقریباً هر x داریم

$$\Psi_x(f_s, t) = \Psi_x(f_c, t), \quad \forall t \in [0, \infty].$$

حال اگر $\omega \in \Omega$ طوری باشد که رابطه بالا برای Φ_ω -تقریباً هر x برقرار باشد و فرض ۱۷.۴ برای Ψ_ω و Φ_ω برقرار باشد، حکم نتیجه مستقیمی از گزاره ۲۶.۴ است. $\square$

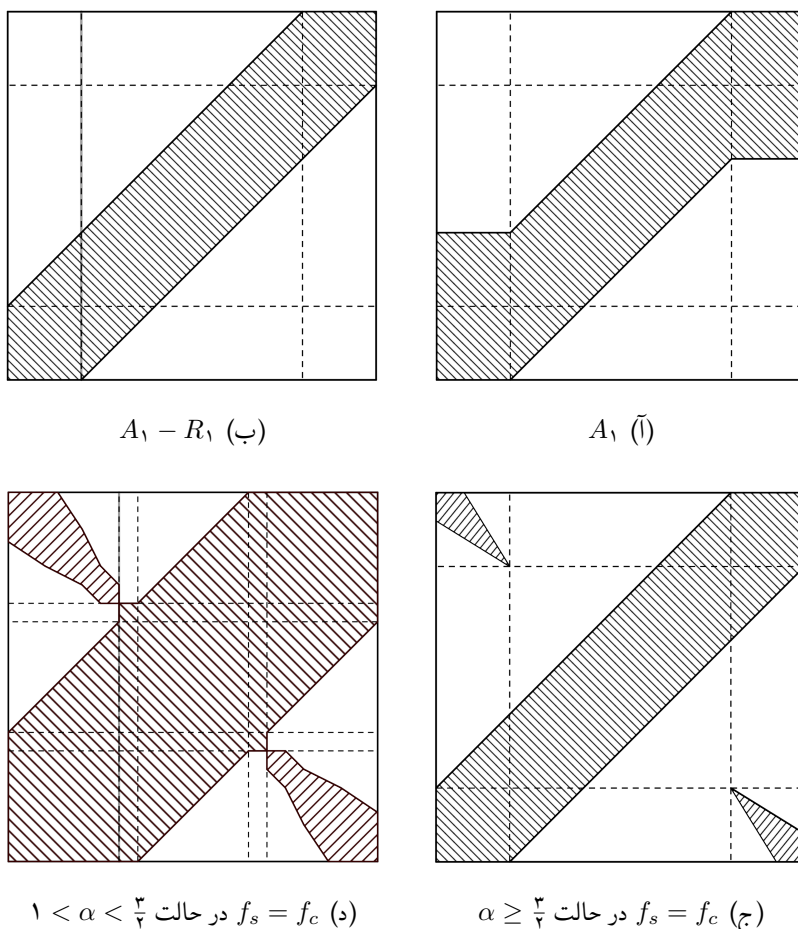
لم ۳۵.۴. فرض کنید $a \in \mathbb{R}^d$ ، $A \subseteq \mathbb{R}^d$ و $r > 0$. C را مجموعه نقاطی مثل x بگیرید که برای هر $a' \in A$ ، $|x - a| < |x - a'| + r$. C کران‌دار است اگر و تنها اگر $C \cap B_r(a) \subseteq \text{Conv}(A)^\circ$ ، که در آن $\text{Conv}(\cdot)$ نماد پوش محدب است.

اثبات. به راحتی دیده می‌شود که C یک مجموعه ستاره‌وار با مرکز a است و به علاوه، اگر $x \in \partial C$ آنگاه پاره‌خط واصل x و a کاملاً در $C \cup \{x\}$ قرار دارد. بنابراین C بی‌کران است اگر و تنها اگر شامل یک نیم‌خط $\{a + tv : t \in [0, \infty)\}$ باشد، که در آن $v \in \mathbb{R}^d$ یک بردار واحد است. طبق تعریف C ، این خاصیت معادل است با این که به ازای یک بردار واحد v داشته باشیم $A \subseteq \{x : v \cdot (x - a) \leq r\}$. معادلاً $B_r(a) \not\subseteq \text{Conv}(A)^\circ$. $\square$

اثبات قضیه ۲۹.۴. با استفاده از قضیه تجزیه ارگودیک (نتیجه ۱۵.۱)، می‌توانیم فرض کنیم $\mathbb{P}$ یک اندازه تصادفی ارگودیک برای خانواده $(\theta_s)_{s \in \mathbb{R}^d}$ است.

(آ) یک مرکز را بد می‌نامیم هرگاه قلمرو آن بی‌کران باشد. مجموعه مرکزهای بد را Ξ' بنامید. فرض کنید با احتمال مثبتی داشته باشیم $\Psi(\Xi') \neq \emptyset$. پس طبق ارگودیک بودن، این موضوع با احتمال یک رخ می‌دهد. چون F هم‌ورد است، تحدید Ψ به Ξ' (که آن را Ψ' می‌نامیم) نیز یک اندازه تصادفی ارگودیک با شدت مثبت است. عضو دلخواه $\xi \in \Xi'$ را در نظر بگیرید و C را قلمرو ورونوی ξ برای Ψ' بگیرید (تعریف ۱.۶). ادعا می‌کنیم که قلمرو ξ زیرمجموعه‌ای از C است و تناقض مستقیماً از گزاره ۵.۶ برای Ψ' نتیجه می‌شود. اگر ادعا درست نباشد، $x_0 \notin C$ را طوری بگیرید که $F(x_0, \xi) > 0$. طبق تعریف C و لم ۳.۶ به دست می‌آوریم $\Psi'(B_{|x_0 - \xi|}^\circ(x_0)) \geq 2 > 1$. پس یک مرکز بد $\xi_1 \in B_{|x_0 - \xi|}^\circ(x_0)$ وجود دارد که $F(x_0, \xi_1) < 1$. حال x_0, ξ_1 را می‌خواهد، زیرا ξ_1 را به ξ ترجیح می‌دهد. همچنین ξ_1 نیز x_0 را می‌خواهد زیرا قلمرو ξ_1 بی‌کران است. پس (x_0, ξ_1) یک زوج ناپایدار است و این یک تناقض است.

(ب) طبق پایایی، کافی است نشان دهیم برای یک نقطه غیر تصادفی z ، اجتماع قلمرو مکان‌های عضو $B_1(z)$ تقریباً همیشه اندازه متناهی (نسبت به Ψ) دارد. یک نقطه شبکه‌ای $z \in \mathbb{Z}^d$ را بد می‌نامیم هرگاه این خاصیت برای z برقرار نباشد. با فرض خلف، فرض کنید مبدأ مختصات با احتمال مثبتی یک نقطه شبکه‌ای بد است. پس مجموعه نقاط شبکه‌ای بد یک فرآیند نقطه‌ای ساده ارگودیک در $\mathbb{Z}^d$ با شدت مثبت تشکیل می‌دهند. فرض کنید Z مجموعه نقاط شبکه‌ای بد باشد که شامل $0 := z_0$ است. طبق پایایی، هر نیم‌فضا شامل عضوی از Z است (مشابه لم ۶.۱) و بنابراین خواهیم داشت $\text{Conv}(Z) = \mathbb{R}^d$. بنابراین می‌توانیم $z_1, \dots, z_n \in Z \setminus \{0\}$ را طوری بیابیم که $B_2(z_0) \subseteq \text{Conv}(z_1, \dots, z_n)$. فرض کنید C_0 ناحیه‌ای باشد که در لم ۳۵.۴ به ازای $\{z_1, \dots, z_n\}$ ، $A = \{z_1, \dots, z_n\}$ ، $a = z_0$ و $r = 2$ تعریف شده است، که طبق حکم آن لم کران‌دار است. برای $i = 1, \dots, n$ ، C_i را مجموعه نقاطی مثل x خارج از C_0 بگیرید که فاصله x از z_i نزدیک‌تر از فاصله x از سایر نقاط A است. T را اجتماع قلمرو مکان‌های عضو $B_1(z_0)$ بگیرید. چون z_0 یک نقطه شبکه‌ای بد است، داریم $\Psi(T) = \infty$. با توجه به این که $\Psi(C_0) < \infty$ ، وجود دارد $0 < i$ و یک مجموعه بورل کران‌دار $D \subseteq T \cap C_i$ به طوری که $\Psi(D) > 1$. با توجه به این که z_i نیز یک نقطه شبکه‌ای بد است، مکانی مثل $x_i \in B_1(z_i)$ وجود دارد که قلمرو آن شامل مرکزی دورتر از تمام مراکز عضو D است. با توجه به این که $\Psi(D) > 1$ ، می‌توانیم یک مرکز $\xi_i \in D$ را بیابیم به طوری که $F(x_i, \xi_i) < 1$. ادعا می‌کنیم (x_i, ξ_i) یک زوج ناپایدار است. چون $\xi_i \in T$ ، مکان $x_0 \in B_1(z_0)$ وجود دارد به طوری که $F(x_0, \xi_i) > 0$. از این که $\xi_i \notin C_0$ نتیجه می‌شود $|\xi_i - z_0| \geq |\xi_i - z_i| + 2$. پس



شکل ۱.۴: محمل چند تابع از توابع ذکر شده در مثال ۳۸.۴، که توابعی از $[0, \alpha] \times [0, \alpha]$ به $\{0, 1\}$ هستند. محور افقی نشان‌دهنده مکان‌ها و محور عمودی نشان‌دهنده مرکزها است.

$|\xi_i - x_i| > |\xi_i - x_0|$ و بنابراین x_i, ξ_i را می‌خواهد. از طرف دیگر، x_i نیز ξ_i را می‌خواهد زیرا طبق نحوه انتخاب x_i قلمرو آن شامل مرکزی دورتر از ξ_i است. پس (x_i, ξ_i) یک زوج ناپایدار است و این یک تناقض است. $\square$

۶.۴ چند مثال

در مثال‌های زیر منظور از Z_d اندازه شمارشی روی $\mathbb{Z}^d$ است. هرچند Z_d به عنوان یک اندازه روی $\mathbb{R}^d$ پایا نیست، اما با انتقال آن با یک بردار تصادفی در $[0, 1]^d$ یک اندازه تصادفی ارگودیک به دست می‌آوریم. به این ترتیب ادعاهای قضایای ۱۶.۴، ۹.۴ و ۲۷.۴ هم‌چنان صادق خواهند بود.

مثال ۳۶.۴. در حالتی که $\varphi = \mathcal{L}_d$ و ψ یک اندازه شمارشی ساده باشد، چگالی انتقال مکان-بهینه یک تخصیص ناورد را به دست می‌دهد که با تخصیص معرفی شده در [۶] یکسان است (با صرف نظر کردن از یک مجموعه اندازه صفر در فضا). هم چنین تعاریف ۲.۴ و ۱۴.۴ نیز تعمیمی از تعاریف تخصیص و پایداری در [۶] خواهند بود. مثال ۵.۳ را ببینید.

مثال ۳۷.۴. فرض کنید φ و ψ هر دو اندازه لبگ در $\mathbb{R}^d$ باشند. در این صورت الگوریتم مکان-بهینه در گام اول به جواب می‌رسد؛ یعنی $f_s(x, \xi) = A_1(x, \xi) = 1_{\{|x-\xi|<b\}}$ که در آن b عددی است که حجم گوی به شعاع b برابر با یک است. چگالی انتقال مرکز-بهینه نیز با همین تابع برابر است. بنابراین طبق گزاره ۲۶.۴ چگالی انتقال مقید پایدار برای φ و ψ ، (φ, ψ) -یکتا است.

مثال ۳۸.۴. فرض کنید φ و ψ تعیین اندازه لبگ به بازه $[0, \alpha]$ باشند. شکل‌های ۱۰.۴ (آ) و ۱۰.۴ (ب) مرحله اول الگوریتم ۵.۴ را در حالت $\alpha \geq \frac{2}{3}$ نشان می‌دهند. می‌توان دید که در حالت‌های $\alpha \geq \frac{2}{3}$ و $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{2}{3}$ چگالی انتقال مکان-بهینه و مرکز-بهینه هر دو (تقریباً همه جا) برابر با تابعی هستند که به ترتیب در شکل‌های ۱۰.۴ (ج) و ۱۰.۴ (د) نشان داده شده اند (توجه کنید که در حالت دوم الگوریتم در زمان متناهی به جواب می‌رسد، اما در حالت اول خیر). در حالت $\alpha \leq 1$ نیز هر دو متحد با یک هستند. بنابراین می‌توانیم از گزاره ۲۶.۴ استفاده کنیم تا نتیجه بگیریم که چگالی انتقال مقید پایدار برای φ و ψ ، (φ, ψ) -یکتا است.

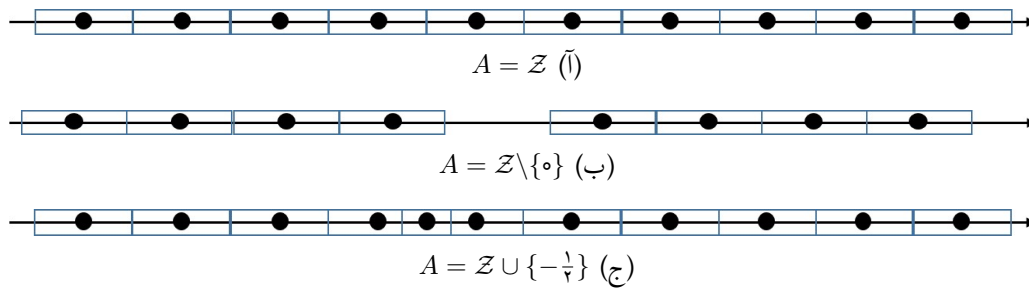
در حالت $\alpha \geq \frac{2}{3}$ مکان‌هایی (و به طور مشابه مرکزهایی) که فاصله آن‌ها از دو انتهای بازه کم‌تر از $\frac{1}{\phi}(1 - \frac{1}{\phi})$ است راضی (و به طور مشابه اشباع) نشده‌اند، که در آن ϕ عدد طلایی است؛ یعنی $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. در حالت $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{2}{3}$ نیز مکان‌ها و مراکز اشباع نشده‌ای در دو انتهای بازه وجود دارند.

خطوط نقطه‌چین در سه شکل اول خطوطی هستند که از لبه‌ها به فاصله $\frac{1}{\phi}$ هستند. در شکل چهارم خطوط به فاصله ۱ از لبه‌ها نیز رسم شده‌اند. پاره‌خط‌های کوچک در شکل سوم شیب $-\phi$ یا $-\frac{1}{\phi}$ دارند که در آن ϕ عدد طلایی است. در شکل چهارم، ناحیه بالا و سمت چپ اشتراک مربع با انتقال یافته‌ای از ناحیه بی‌کران محدود به چندضلعی $\dots A_3 A_2 A_1 B_1 B_2 B_3 \dots$ است که در آن $A_i = (-\beta F_i, \beta F_{i-1})$ و $B_i = (-\beta F_{i-1}, \beta F_i)$ و $\beta = \frac{2}{3} - \alpha$ دنباله فیبوناچی با شروع از $F_0 = F_1 = 1$ است. توجه کنید که تعداد رئوس این ناحیه به مقدار α بستگی دارد.

مثال ۳۹.۴. فرض کنید $\varphi = \mathcal{L}_1$ و ψ اندازه شمارشی روی زیرمجموعه A از $\mathbb{Z}$ باشد. برای $x \in \mathbb{R}$ و $\xi \in A$ داریم

$$f_s(x, \xi) = \begin{cases} 1, & |x - \xi| \leq \frac{1}{\phi} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

به راحتی دیده می‌شود که f_s موازنه‌گر است اگر و تنها اگر $A = \mathbb{Z}$. این مثال نشان می‌دهد که در حالت غیرتصادفی، برابری شدت نمونه‌ای φ و ψ تضمین نمی‌کند که چگالی انتقال مکان-بهینه یک چگالی انتقال موازنه‌گر باشد. شکل ۲.۴ سه حالت خاص از این مثال را نشان می‌دهد. به طور خاص، حالتی را در نظر بگیرید که $A = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. در این حالت برای هر $\xi \in A$ نقاط بازه $[\xi - \frac{1}{\phi}, \xi + \frac{1}{\phi}]$ در همه مراحل تنها به ξ درخواست می‌دهند و ξ در همه



شکل ۲.۴: سه حالت خاص در مثال ۳۹.۴. نقطه‌های توپر مرکزها هستند و مستطیل‌ها بازه‌هایی که قلمرو مرکزها هستند را نشان می‌دهند.

مراحل تنها نقاط این بازه را رد نمی‌کند. نقاط بازه $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ توسط همه نقاط رد می‌شوند. به طور مشابه، حالتی را در نظر بگیرید که $A = \mathbb{Z} \cup \{-\frac{1}{4}\}$. در این حالت همه مراحل الگوریتم برابر با مرحله اول خواهند بود و مرکزهای $\{0, -\frac{1}{4}, -1\}$ اشباع نمی‌شوند.

مثال ۴۰.۴. فرض کنید $\varphi = \mathcal{L}_2$ و $\psi = \mathcal{Z}_1 \otimes \mathcal{L}_1$. تعریف کنید

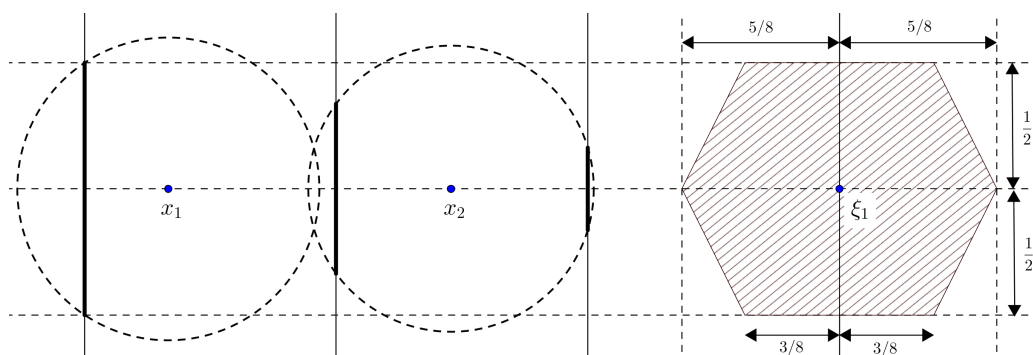
$$\tau(x) := (\lfloor x_1 + \frac{1}{4} \rfloor, x_2)$$

$$f(x, \xi) := \begin{cases} 1, & \max\{|x_1 - \xi_1|, |x_2 - \xi_2|\} \leq \frac{1}{4}, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که در آن $[\cdot]$ تابع جزء صحیح است و $\tau(x)$ نزدیک‌ترین مرکز به x است. τ یک تخصیص (φ, ψ) -موازنه‌گر است که یک هسته انتقال مقید نیست، اما با تعریف ۲.۵ یک تخصیص پایدار است. f نیز یک چگالی انتقال مقید (φ, ψ) -موازنه‌گر است که پایدار نیست. برای دیدن این موضوع توجه کنید که مرکز $\xi = (0, 0)$ و مکان $x_0 = (a, 0)$ در صورتی که $\frac{1}{4} < a < \frac{5}{8}$ یکدیگر را می‌خواهند. در این مثال الگوریتم مکان-بهینه در یک گام f_s را نتیجه می‌دهد که یک چگالی انتقال مقید موازنه‌گر پایدار است. به ازای $x = (x_1, x_2)$ و $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ مقدار این تابع برابر است با

$$f_s(x, \xi) = \begin{cases} 1, & |x_2 - \xi_2| \leq \min\{\frac{1}{4}, \frac{5}{8} - 2|x_1 - \xi_1|\}, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

قلمرو هر مرکز یک شش ضلعی (غیر منتظم) است که در شکل ۳.۴ نشان داده شده است. توجه کنید که در این مثال الگوریتم مرکز-بهینه در یک گام به نتیجه نمی‌رسد، اما می‌توان دید چگالی انتقال مرکز-بهینه نیز با همین تابع برابر است. بنابراین طبق گزاره ۲۶.۴، چگالی انتقال مقید پایدار برای φ و ψ ، (φ, ψ) -یکتا است. از قضیه ۲۷.۴ نیز می‌توان یکتایی را نتیجه گرفت.



شکل ۳.۴: قلمروهای دو مکان x_1 و x_2 به همراه قلمرو مرکز ξ_1 در مثال ۴.۰.۴. خطوط ممتد عمودی مجموعه $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ را نشان می‌دهند. دایره‌های نقطه‌چین شعاع درخواست آن دو مکان را نشان می‌دهند و خطوط پر رنگ عمودی قلمروهای آن‌ها را نشان می‌دهد.

مثال ۴.۱.۴. قرار دهید $\varphi = 2\mathcal{L}_1$ و $\psi = \mathcal{L}_1 + \mathbb{Z}_1$. به ازای $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ ، چگالی انتقال مکان-بهینه برابر است با

$$f_s(x, \xi) = \begin{cases} 1, & 0 < \xi \leq 2x, \\ 1 - 2x, & \xi = 0, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و به ازای $-\frac{1}{4} \leq x \leq 0$ برابر است با

$$f_s(x, \xi) = \begin{cases} 1, & 2x \leq \xi < 0, \\ 1 - 2|x|, & \xi = 0, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

فرمول مشابهی برای مقادیر دیگر x نیز برقرار است. حکم قضیه ۹.۴ برقرار است (برای استفاده از قضیه باید از یک انتقال تصادفی استفاده کنیم) و f_s یک چگالی انتقال مقید پایدار موازنه‌گر است. طبق گزاره ۱۰.۵، در این مثال تخصیص پایدار موازنه‌گر وجود ندارد. بنابراین الگوی نقطه اضافه غیرتصادفی‌ای برای ψ وجود ندارد که پایدار باشد. مثال ۴.۵.۴ را نیز ببینید. اما تخصیص موازنه‌گر هم‌ورد وجود دارد، مثلاً تخصیص زیر

$$\tau(x) := \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x - \lfloor x \rfloor > \frac{1}{4} \\ 2x - \lfloor x \rfloor, & x - \lfloor x \rfloor \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

مثال ۴.۲.۴. فرض کنید Φ و Ψ دو فرآیند نقطه‌ای ساده (توأم) پایا و ارگودیک در $\mathbb{R}$ باشند که شدت آن‌ها مقادیر مثبت λ_Ψ و λ_Φ است. اندازه‌های تصادفی $\Phi' := \frac{1}{\lambda_\Phi} \Phi$ و $\Psi' := \frac{1}{\lambda_\Psi} \Psi$ ارگودیک هستند و شدت واحد دارند، اما در صورتی که $\frac{\lambda_\Phi}{\lambda_\Psi} \notin \mathbb{Z}$ هیچ تخصیص (Φ, Ψ) -موازنه‌گر وجود ندارد (توجه کنید که $\frac{\lambda_\Phi}{\lambda_\Psi}$ قرار است تعداد نقاط تصویر وارون هر مرکز باشد). در عین حال، قضیه ۹.۴ نشان می‌دهد که یک هسته انتقال هم‌ورد موازنه‌گر بین آن‌ها می‌توان ساخت. البته نوشتن صورت صریح این هسته انتقال کار پیچیده‌ای به نظر می‌رسد.

مثال ۴۳.۴. با شرایط مثال ۴۲.۴، قرار دهید $\Phi'' := \Phi' \times \mathcal{L}_{d-1}$ و $\Psi'' := \Psi' \times \mathcal{L}_{d-1}$ ، که دو اندازه تصادفی ارگودیک روی $\mathbb{R}^d$ با شدت واحد هستند. قضیه ۹.۴ نشان می‌دهد که یک هسته انتقال هم‌ورد موازنه‌گر بین آن‌ها می‌توان ساخت، اما ادعا می‌کنیم هیچ تخصیص هم‌ورد موازنه‌گر بین آن‌ها وجود ندارد.

فرض کنید τ یک تخصیص هم‌ورد (Φ'', Ψ'') -موازنه‌گر باشد. از هم‌ورد بودن نتیجه می‌گیریم که برای مکان x ، بردار $x - \tau_\omega(x)$ تنها به $\pi_1(x)$ و ω بستگی دارد، که π_1 تابع تصویر روی مؤلفه اول است. حال به سادگی نتیجه می‌شود که تخصیص $x \mapsto \pi_1(\tau((x, 0)))$ که روی $\mathbb{R}$ تعریف می‌شود، (Φ', Ψ') -موازنه‌گر است. این موضوع با توجه به مثال ۴۲.۴ یک تناقض است.

همان طور که در این مثال و مثال ۴۲.۴ می‌بینیم، اندازه اول شبه پیوسته نیست. مسئله ۱۴.۵ را ببینید.

مثال ۴۴.۴. فرض کنید φ و ψ به ترتیب تحدید اندازه لب‌گ به بازه‌های $(0, \infty)$ و $(-\infty, 0)$ باشند. به سادگی دیده می‌شود که $f_s(x, \xi) \in \{0, 1\}$ و $f_s(x, \xi) = 1$ اگر و تنها اگر $\lceil x \rceil = \lceil -\xi \rceil$ ، که در آن همان سقف a است؛ یعنی کوچک‌ترین عدد صحیح است که بزرگ‌تر یا مساوی با a است. در این مثال، تابع $x \mapsto -x$ نیز یک تخصیص پایای موازنه‌گر است، اما مقید نیست. این تخصیص با تعریف ۲.۵ پایدار است. مثال ۴۵.۴ را نیز ببینید.

مثال ۴۵.۴. برای دو اندازه دلخواه φ و ψ ، هسته انتقال مکان-بهینه برای $\gamma\varphi$ و $\gamma\psi$ را در نظر بگیرید و γ را به ∞ میل دهید. در صورتی که هسته انتقال مکان-بهینه به یک هسته انتقال وزن‌دار میل کند، آن را T بنامید. به عنوان مثال، در مثال ۴۴.۴، T یک تخصیص خواهد بود که در همان مثال ذکر شده است $(T(x, \cdot) = \delta_{-x})$ ، اما در مثال ۴۱.۴، T یک تخصیص نخواهد بود. در این حالت خواهیم داشت $T(x, \cdot) = \frac{1}{2}(\delta_x + \delta_{\text{round}(x)})$ که در آن $\text{round}(x)$ نزدیک‌ترین عدد صحیح به x است.

فصل ۵

ساختن تخصیص موازنه‌گر

همان‌طور که در مقدمه توضیح دادیم، ساختن تخصیص موازنه‌گر هم‌ورد مسئله‌ای است که در چند سال اخیر مورد توجه قرار گرفته است. در بخش ۱.۵ تخصیص‌های پایدار و حالاتی که از نتایج فصل ۴ می‌توان تخصیص موازنه‌گر به‌دست آورد را بررسی می‌کنیم. در بخش‌های ۲.۵ و ۳.۵ دو ایده دیگر را به کار خواهیم گرفت.

۱.۵ تخصیص‌های پایدار

با توجه به این که یک هسته انتقال ψ -مقید در شرط $T \leq \psi$ صدق می‌کند (طبق تعریف ۱.۴)، یک هسته انتقال ψ -مقید و (φ, ψ) -موازنه‌گر نمی‌تواند یک تخصیص باشد مگر این که ψ یک اندازه گسسته باشد. برای اثبات این موضوع، فرض کنید B یک مجموعه باشد که $0 < \psi(B) < 1$ ، که در صورت گسسته نبودن ψ وجود دارد. روی مجموعه‌ای از مکان‌ها با اندازه مثبت (تحت φ) داریم $T(x, B) > 0$. از طرف دیگر، می‌دانیم $1 > \psi(B) \geq T(x, B)$ و بنابراین $T(x, \cdot)$ نمی‌تواند یک اندازه دیراک باشد و در نتیجه T نمی‌تواند یک تخصیص باشد. در این بخش بیشتر بر حالتی که ψ یک اندازه گسسته است تمرکز می‌کنیم. با ایده‌های [۶] و تعریف ۱۴.۴ تخصیص را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۵. با داشتن اندازه‌های $\varphi, \psi \in M$ ، یک تخصیص تابعی اندازه‌پذیر مانند $\tau : D \rightarrow \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ است که $D \subseteq \mathbb{R}^d$ مجموعه‌ای اندازه‌پذیر است به طوری که $\varphi(D^c) = 0$ و ∞ به عنوان نقطه‌ای اضافه شده به فضا در نظر گرفته می‌شود. تخصیص $\tau, (\varphi, \psi)$ -موازنه‌گر است هرگاه φ -تقریباً همیشه داشته باشیم $\tau \neq \infty$ و به علاوه $\psi(\cdot) = \varphi(\tau^{-1}(\cdot))$ یعنی $\tau_*(\varphi|_D) = \psi$.

یک تخصیص را می‌توان با اغماض به صورت یک هسته انتقال وزن‌دار در نظر گرفت که جرم نقطه s را به تک نقطه $\tau(s)$ می‌فرستد؛ یعنی $\delta_{\tau(s)} := T(s, \cdot)$ هنگامی که $s \notin D \cup \tau^{-1}(\infty)$ و $0 := T(s, \cdot)$ به ازای سایر نقاط. توجه کنید که با این تعریف، τ را نمی‌توان با داشتن T بازسازی کرد، زیرا نقاط $D \setminus \mathbb{R}^d$ و $\tau^{-1}(\infty)$ نقش متفاوتی دارند.

تعریف ۲.۵. با داشتن اندازه‌های $\varphi, \psi \in M$ ، فرض کنید τ یک تخصیص باشد که روی دامنه $D \subseteq \text{supp}(\varphi)$ تعریف شده است و داریم $\varphi(D^c) = 0$. می‌گوییم τ شبه موازنه‌گر است هرگاه برای هر $B \in \mathcal{G}$ داشته باشیم $\psi(B) \leq \varphi(\tau^{-1}(B))$ ؛ یعنی $\tau_*(\varphi_D) \leq \psi$. با داشتن تخصیص شبه موازنه‌گر τ ، می‌گوییم مکان $x_0 \in D$ راضی است هرگاه $\tau(x_0) \neq \infty$ و ناراضی است هرگاه $\tau(x_0) = \infty$ (با مکان‌های خارج D کاری نداریم). مرکز ξ_0 را اشباع‌شده می‌گوییم هرگاه در محمل اندازه $\psi - \tau_*(\varphi|_D)$ نباشد. می‌گوییم مکان x_0 مرکز ξ_0 را می‌خواهد هرگاه یا x_0 ناراضی باشد و یا $|x_0 - \xi_0| > |x_0 - \tau(x_0)|$. می‌گوییم مرکز ξ_0 مکان x_0 را می‌خواهد هرگاه اولاً $\tau(x_0) \neq \xi_0$ و ثانیاً یا ξ_0 اشباع نشده باشد و یا مکان x_1 موجود باشد که $\tau(x_1) = \xi_0$ و $|x_1 - \xi_0| > |x_0 - \xi_0|$. می‌گوییم تخصیص شبه موازنه‌گر τ پایدار است هرگاه هیچ زوج (x_0, ξ_0) موجود نباشد که هر دو یکدیگر را بخواهند. به عنوان مثال از تخصیص‌های پایدار، مثال‌های ۳۶.۴، ۳۹.۴، ۴۰.۴ و ۴۴.۴ را ببینید.

قضیه ۳.۵. فرض کنید Φ و Ψ دو اندازه تصادفی ارگودیک روی $\mathbb{R}^d$ با شدت برابر و مثبت باشند. فرض کنید τ یک تابع تصادفی هم‌ورد باشد که تقریباً همیشه یک تخصیص پایدار برای Φ و Ψ است. در این صورت τ تقریباً همیشه یک تخصیص (Φ, Ψ) -موازنه‌گر است. به طور خاص، در حالتی که $\Phi = \lambda\Psi\mathcal{L}_d$ ، یک الگوی نقطه اضافه به دست می‌آید.

اثبات این قضیه دقیقاً مشابه قضایای ۱۶.۴ و ۱۰.۴ است و از آوردن آن صرف نظر می‌کنیم. در ادامه این بخش به بحث وجود و ساختن تخصیص پایدار می‌پردازیم.

۱.۱.۵ چگالی انتقال مکان-بهینه در حالت‌های خاص

گزاره ۴.۵. در حالت‌های زیر چگالی انتقال مکان-بهینه $(\varphi \otimes \psi)$ -تقریباً همه‌جا مقادیر $\{0, 1\}$ به خود می‌گیرد. آ. وقتی φ و ψ هر دو نسبت به $\mathcal{L}$ مطلقاً پیوسته باشند.

ب. وقتی یکی از φ و ψ نسبت به $\mathcal{L}$ مطلقاً پیوسته باشد و دیگری یک اندازه شمارشی ساده باشد.

پ. وقتی φ و ψ هر دو اندازه شمارشی ساده باشند و فرض ۱۷.۴ برقرار باشد.

اثبات این گزاره ساده است و از آوردن آن صرف نظر می‌کنیم. برای اثبات کافی است با استقرا نشان دهیم توابع A_n و R_n در الگوریتم ۵.۴ تقریباً همه‌جا مقادیر $\{0, 1\}$ به خود می‌گیرند.

نکته ۵.۵. در حالتی که هر کدام از φ و ψ یا بدون اتم باشند و یا اندازه شمارشی ساده باشند، حتی اگر فرض ۱۷.۴ نیز برقرار نباشد، می‌توان الگوریتم ۵.۴ را کمی تغییر داد تا یک چگالی انتقال مقید پایدار با مقادیر $\{0, 1\}$ بیابیم. برای این کار، کافی است تعریف $A_n(x_0 \cdot)$ و $R_n(\cdot, \xi_0)$ را به ترتیب روی $\partial B_{a_n(x_0)}(x_0)$ و $\partial B_{r_n(\xi_0)}(\xi_0)$ استفاده از ترتیب لغت‌نامه‌ای روی نقاط این کره‌ها (یا روشی دیگر) به طریق دیگری تعریف کنیم. نکته ۱۲.۴ را ببینید.

گزاره ۶.۵. اگر ψ یک اندازه شمارشی ساده باشد، یک چگالی انتقال وزن دار که $(\varphi \otimes \psi)$ -تقریباً همه جا مقادیر $\{0, 1\}$ بگیرد یک تخصیص را مشخص می‌کند. پس طبق نکته ۵.۵، در حالات زیر الگوریتمی برای ساختن تخصیص پایدار ارائه کرده‌ایم.

• وقتی که φ بدون اتم باشد و ψ یک اندازه شمارشی ساده باشد،

• وقتی که φ و ψ هر دو اندازه‌های شمارشی ساده باشند.

در گزاره فوق، برای مشخص کردن تخصیص پایدار باید به این صورت عمل کنیم که اگر یک مکان x توسط همه مرکزها رد شود، قرار دهیم $\tau(x) = \infty$. الگوریتم ۴.۳ را ببینید.

نکته ۷.۵. در حالتی که φ بدون اتم باشد و $\psi = \sum_{i=1}^{\infty} w_i \delta_{\xi_i}$ یک اندازه با محمل گسسته باشد، می‌توانیم الگوریتم ۵.۴ را کمی تغییر دهیم تا یک تخصیص پایدار به دست آوریم. برای این کار خود را به هسته‌های انتقال $\bar{\psi}$ -مقید محدود می‌کنیم که $\bar{\psi} = \sum_i \delta_{\xi_i}$ اندازه شمارشی‌ای است که محمل آن با محمل ψ یکسان است. معادلاً چگالی انتقال مقید را به صورت $f(x, \xi_i) \leq \frac{1}{w_i}$ تعریف می‌کنیم. هم‌چنین توابع a_n و A_n را به طور مشابه تغییر می‌دهیم ($A_n(\cdot, \xi_i)$ تقریباً همه جا مقادیر $\{0, \frac{1}{w_i}\}$ خواهد گرفت). در این صورت حاصل الگوریتم یک چگالی انتقال وزن دار است با این خاصیت که $f_s(\cdot, \xi_i) \in \{0, w_i\}$ و یک تخصیص را مشخص می‌کند.

از نکته فوق قضیه زیر را به دست می‌آوریم.

قضیه ۸.۵. با شرایط قضیه ۹.۴، فرض کنید تقریباً همیشه Φ یک اندازه تصادفی بدون اتم و Ψ یک اندازه تصادفی با محمل گسسته باشد. می‌توان الگوریتمی ارائه داد که تقریباً همیشه یک تخصیص (Φ, Ψ) -موازنه‌گر پایدار بسازد.

۲.۱.۵ بررسی وجود تخصیص پایدار در حالت کلی

فرض کنید $\varphi, \psi \in M$ دو اندازه دلخواه باشند.

فرض ۹.۵. مجموعه بول A موجود باشد که

$$\psi(A^c) = 0, \quad \varphi|_A \leq \psi.$$

گزاره ۱۰.۵. فرض کنید $\varphi, \psi \in M$ دو اندازه دلخواه باشند.

آ. فرض ۹.۵ یک شرط لازم برای وجود تخصیص پایدار بین φ و ψ است. در واقع، برای هر تخصیص پایدار τ بین φ و ψ ، مجموعه بول A وجود دارد که ψ روی A متمرکز است و $\tau|_A$ همانی است.

ب. به عکس، با شرایط فرض ۹.۵، اگر τ_0 یک تخصیص پایدار بین $\varphi - \varphi|_A$ (یعنی همان $\varphi|_{A^c}$) و $\psi - \varphi|_A$ باشد که برد آن زیرمجموعه محمل $\psi - \varphi|_A$ است، آنگاه تخصیص زیر یک تخصیص پایدار بین φ و ψ است.

$$\tau(x) := \begin{cases} x, & x \in A \\ \tau_0(x) & x \notin A \end{cases}.$$

مثال ۴۱.۴ حالتی را نشان می‌دهد که فرض ۹.۵ برقرار نیست و بنابراین تخصیص پایدار وجود ندارد.

اثبات. (آ) کافی است حکم دوم این قسمت را ثابت کنیم. فرض کنید τ یک تخصیص پایدار بین φ و ψ باشد. طبق تعریف، τ شبه‌موازنه‌گر است و بنابراین $A \cdot \tau_*(\varphi|_D) \leq \psi$ را اجتماع بُرد τ با مجموعه مراکز اشباع نشده بگیرد. توجه کنید که $\tau_*(\varphi|_D)$ و $\psi - \tau_*(\varphi|_D)$ روی A^c متحد با صفر هستند. پس ψ روی A متمرکز است. فرض کنید به ازای $a \in A$ داشته باشیم $\tau(a) \neq a$. در این صورت مکان a مرکز a را می‌خواهد. هم‌چنین با توجه به این که a در بُرد τ است و یا اشباع نشده است، مرکز a نیز مکان a را می‌خواهد و این یک تناقض است.

(ب) توجه کنید که $\varphi - \varphi|_A$ روی A^c متمرکز است. بنابراین $\tau_*(\varphi) = \tau_*(\varphi - \varphi|_A) + \varphi|_A$. از این که τ_* برای $\varphi - \varphi|_A$ و $\psi - \varphi|_A$ شبه‌موازنه‌گر است نتیجه می‌شود که τ نیز برای φ و ψ شبه‌موازنه‌گر است. هم‌چنین هیچ یک از مکان‌های درون A هیچ مرکزی را نمی‌خواهند. به علاوه، هر مرکز درون A در صورتی که در محل $\psi - \varphi|_A$ نباشد (یعنی یک مرکز برای $\psi - \varphi|_A$ نباشد)، اشباع شده است و هیچ مکانی را نمی‌خواهد (در اینجا از این فرض جزئی استفاده می‌کنیم که برد τ_* زیرمجموعه محل $\psi - \varphi|_A$ است).

فرض کنید مکان x_0 و مرکز ξ_0 یکدیگر را بخواهند (با در نظر گرفتن τ). بنابراین طبق آنچه گفتیم ξ_0 یک مرکز برای $\psi - \varphi|_A$ نیز هست، و $x_0 \notin A$ و $\xi_0 \neq \tau(x_0)$. مکان x_0 با در نظر گرفتن τ_* نیز ξ_0 را می‌خواهد. اگر ξ_0 با در نظر گرفتن τ اشباع نشده باشد، آنگاه با در نظر گرفتن τ_* نیز اشباع نشده است (زیرا محل $(\psi - \varphi|_A) - \tau_*(\varphi - \varphi|_A)$ برابر با محل $\psi - \tau_*(\varphi)$ است). این موضوع با پایداری τ_* متناقض است. بنابراین حالت دیگر برقرار است؛ یعنی مکان x_1 موجود است که $\tau(x_1) = \xi_0$ و $|x_0 - \xi_0| > |x_1 - \xi_0|$. باید داشته باشیم $x_1 \notin A$. به سادگی نتیجه می‌شود که مرکز ξ_0 با در نظر گرفتن τ_* نیز مکان x_0 را می‌خواهد که این یک تناقض است. $\square$

نکته ۱۱.۵. با توجه به گزاره فوق، برای جستجوی تخصیص پایدار خود را به حالتی محدود می‌کنیم که فرض ۹.۵ برقرار باشد. با جایگزین کردن $\varphi - \varphi|_A$ و $\psi - \varphi|_A$ به جای φ و ψ ، کافی است فرض کنیم φ و ψ نسبت به هم تکیه هستند؛ یعنی مجموعه A موجود است که φ روی A^c متمرکز است و ψ روی A .

این بخش را با چند مسئله باز به پایان می‌رسانیم.

تعریف ۱۲.۵. اندازه φ روی $\mathbb{R}^d$ را شبه پیوسته^۱ می‌نامیم هرگاه به هر رویه^۲ لیپشیتز^۲ $(d-1)$ -بعدی اندازه صفر نسبت دهد.

به عنوان مثال هر اندازه‌ای که نسبت به اندازه لبگ مطلقاً پیوسته باشد، شبه پیوسته است.

مسئله باز ۱۳.۵. فرض کنید φ و ψ دو اندازه روی $\mathbb{R}^d$ باشند به طوری که φ شبه پیوسته باشد و فرض ۹.۵ برقرار باشد. آیا یک تخصیص پایدار برای φ و ψ وجود دارد؟

^۱Semi-continuous

^۲Lipschitz

ممکن است با ایده مثال ۴.۴ بتوان یک پاسخ به این مسئله پاسخ داد، اما این روش را هنوز به طور کامل بررسی نکرده‌ایم.

در صورتی که پاسخ مسئله فوق مثبت باشد و یک تخصیص پایدار را بتوان طوری انتخاب کرد (در صورت عدم یکتایی) که به صورت اندازه‌پذیر و هم‌ورد به (φ, ψ) بستگی داشته باشد، آنگاه طبق قضیه ۳.۵ می‌توان به مسائل زیر نیز در حالتی که شرایط فرض ۹.۵ برقرار باشد پاسخ داد.

مسئله باز ۱۴.۵. فرض کنید Φ و Ψ دو اندازه تصادفی ارگودیک با شدت برابر باشند و Φ تقریباً همیشه شبه‌پیوسته باشد. آیا یک تخصیص (Φ, Ψ) -موازنه‌گر هم‌ورد وجود دارد؟
پاسخ مثبت به مسئله فوق به حل مسئله زیر می‌انجامد.

مسئله باز ۱۵.۵. آیا برای هر اندازه تصادفی ارگودیک ناصفر Ψ یک الگوی نقطه اضافه غیر تصادفی وجود دارد؟
نکته ۱۶.۵. طبق گزاره ۱۰.۵، بدون فرض ۹.۵، در مسائل ۱۴.۵ و ۱۵.۵ تخصیص پایدار و الگوی نقطه اضافه پایدار وجود ندارد، اما همچنان ممکن است تخصیص و الگوی نقطه اضافه موازنه‌گر غیر پایدار وجود داشته باشد.
نکته ۱۷.۵. علت انتخاب شرط شبه‌پیوسته بودن این است که بدون این شرط لزوماً تخصیص پایدار هم‌ورد وجود ندارد، همان طور که در مثال‌های ۴۲.۴ و ۴۳.۴ دیده می‌شود. این شرط در نظریه انتقال بهینه^۳ نیز ظاهر می‌شود برای این که انتقال بهینه یک تخصیص باشد. به عنوان مسئله‌ای ضعیف‌تر، می‌توان در مسئله ۱۳.۵ فرض کرد φ نسبت به اندازه لبگ پیوسته باشد.

۲.۵ فرآیند نقطه‌ای کمکی و مسئله تخصیص

در این بخش روشی را برای حل مسئله ۱۴.۵ در پیش می‌گیریم^۴. هرچند مسئله به طور کامل حل نشده است، اما قضیه ۱۸.۵ نشان خواهد داد که حل مسئله باز ۲۲.۵ به حل آن مسئله می‌انجامد. خلاصه ایده به صورت زیر است. فرض کنید Φ و Ψ دو اندازه تصادفی ارگودیک با شرایط مسئله ۱۴.۵ باشند. فرض کنید بتوانیم از روی Φ و Ψ یک فرآیند نقطه‌ای ساده پایا مانند Π به دست آوریم؛ مثلاً با استفاده از مسئله باز ۲۲.۵. حال یک تخصیص هم‌ورد (Φ, Π) -موازنه‌گر مانند τ و یک هسته انتقال هم‌ورد (Π, Ψ) -موازنه‌گر مانند T را در نظر می‌گیریم. سپس برای هر $a \in \Pi$ ، بین دو اندازه $\Phi|_{\tau^{-1}(a)}$ و $T(a, \cdot)$ ، که اندازه کل آن‌ها متناهی است، با استفاده از انتقال جرم بهینه یک تخصیص موازنه‌گر می‌یابیم. به این صورت یک تخصیص هم‌ورد (Φ, Ψ) -موازنه‌گر به دست خواهد آمد.

قضیه ۱۸.۵. فرض کنید Φ و Ψ دو اندازه تصادفی روی $\mathbb{R}^d$ باشند. فرض کنید Φ تقریباً همیشه شبه‌پیوسته است و به علاوه، Φ و Ψ تقریباً همیشه شدت نمونه‌ای برابر دارند.

^۳Optimal transport

^۴از گانتز لست برای ایده اولیه این روش تشکر می‌کنم.

آ. اگر روی همان فضای احتمال یک فرآیند نقطه‌ای ساده پایا وجود داشته باشد، آن‌گاه یک تخصیص هم‌ورد وجود دارد که تقریباً همیشه (Φ, Ψ) -موازنه‌گر است. به علاوه، می‌توان یک تخصیص با خاصیت مذکور به صورت یک تابع اندازه‌پذیر و هم‌ورد از سه اندازه مفروض در نظر گرفت.

ب. در صورتی که پاسخ مسئله ۲۲.۵ مثبت باشد نیز حکم قسمت قبل برقرار است؛ یعنی در این صورت پاسخ مسئله ۱۴.۵ مثبت است.

با توجه به قضیه فوق و اثبات آن، فوراً قضایای زیر را به دست می‌آوریم.

قضیه ۱۹.۵. فرض کنید Φ و Ψ دو اندازه تصادفی روی $\mathbb{R}^d$ باشند. فرض کنید Φ تقریباً همیشه شبه‌پیوسته است و به علاوه، Φ و Ψ تقریباً همیشه شدت نمونه‌ای برابر دارند. در این صورت با گسترش فضای نمونه، یک تخصیص تصادفی وجود دارد که تقریباً همیشه (Φ, Ψ) -موازنه‌گر است (اما لزوماً تابعی از Φ و Ψ نیست).

قضیه ۲۰.۵. در صورتی که پاسخ مسئله ۲۲.۵ مثبت باشد، پاسخ مسئله‌های ۱۴.۵ و ۱۵.۵ نیز مثبت است. به علاوه، در این مسئله‌ها می‌توان روشی ساختنی برای ارائه تخصیص هم‌ورد موازنه‌گر ارائه داد. البته ذکر این نکته لازم است که در روش ساختنی مورد نظر، از انتقال بهینه بین اندازه‌های متناهی با محمل فشرده استفاده می‌شود.

تعریف ۲۱.۵. برای اندازه φ روی $\mathbb{R}^d$ ، زیرفضای جهت‌های ناورد^۵ φ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V := \{v \in \mathbb{R}^d : \theta_{tv}\varphi = \varphi, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

زیرفضای جهت‌های ناوردا همیشه یک زیرفضای برداری $\mathbb{R}^d$ است.

مسئله ۲۲.۵. باز $\varphi \in M$ به طوری که زیرفضای جهت‌های ناوردای φ برابر با $\{0\}$ باشد، مجموعه گسسته ناتهی $S \subseteq \mathbb{R}^d$ را می‌توان ساخت به طوری که به صورت اندازه‌پذیر و هم‌ورد به φ بستگی داشته باشد.

توجه کنید که در مسئله فوق این شرط که زیرفضای جهت‌های ناوردا بدیهی باشد لازم است، زیرا مجموعه ساخته شده باید به طریق هم‌ورد ساخته شود.

اثبات قضیه ۱۸.۵. طبق قضیه تجزیه ارگودیک (نتیجه ۲۸.۲) کافی است فرض کنیم اندازه‌ها ارگودیک هستند (توجه کنید که در نهایت، تخصیص تعریف شده در این اثبات به صورت تابعی از تحقق‌های دو اندازه تعریف می‌شود و تنها برای اثبات خوش تعریف بودن و موازنه‌گر بودن آن از نتیجه ۲۸.۲ استفاده می‌شود). شدت Φ و Ψ ، که برابرند، را λ بنامید.

(آ). فرآیند نقطه‌ای مفروض را Π بنامید و شدت آن را λ' . با در نظر گرفتن اندازه‌های $\frac{\lambda'}{\lambda}\Phi$ و $\frac{\lambda'}{\lambda}\Psi$ به جای Φ و Ψ ، بدون کم شدن از کلیت مسئله می‌توانیم از ابتدا فرض کنیم $\lambda' = \lambda$. طبق گزاره ۶.۵ یک تخصیص هم‌ورد

^۵Subspace of invariant directions

(Φ, Π) -موازنه‌گر وجود دارد که آن را τ می‌نامیم. T را نیز هسته انتقال متناظر با چگالی انتقال مکان-بهینه برای Π و Ψ بگیرید، که تقریباً همیشه (Π, Ψ) -موازنه‌گر است. در ادامه، $\omega \in \Omega$ را عضو دلخواهی بگیرید که خواص موازنه فوق برای Φ_ω ، Π_ω و Ψ_ω برقرار باشد.

نقطه $a \in \Pi_\omega$ را دلخواه بگیرید. اندازه‌های $\Phi_\omega|_{\tau^{-1}(a)}$ و $T(a, \cdot)$ اندازه احتمال هستند و طبق قسمت (آ) از قضیه ۲۹.۴ دارای محمل فشرده هستند. پس طبق قضیه ۲۸.۱۰ از [۲۰]، تخصیص یکتایی وجود دارد که انتقال جرم بهینه بین این دو اندازه را فراهم میکند (برای یک تابع هزینه مناسب که آن را معلوم فرض می‌کنیم، مانند $c(x, y) := |x - y|^2$). اگر برای همه $a \in \Pi_\omega$ این تخصیص‌ها را در نظر بگیریم و آن‌ها را به هم بچسبانیم، یک تخصیص موازنه‌گر بین Φ_ω و Ψ_ω به دست می‌آید. این تخصیص به صورت اندازه‌پذیر و هم‌ورد به $(\Phi_\omega, \Psi_\omega)$ بستگی دارد و حکم ثابت میشود.

(ب). برای یک زیرفضای $V \subseteq \mathbb{R}^d$ ، π_V را تابع تصویر قائم روی V در نظر بگیرید. V را اشتراک زیرفضای جهت‌های ناوردای Φ و Ψ بگیرید و W را زیرفضای مکمل و متعامد V . با توجه به ارگودیک بودن، W و V غیر تصادفی هستند. طبق تعریف V ، اندازه‌های Φ و Ψ دو اندازه تصادفی پایا روی W ایجاد می‌کند که آن‌ها را Φ' و Ψ' می‌نامیم؛ به طور دقیق‌تر، $\Phi'(B) := \Phi(B \times_W C_0)$ که در آن C_0 یک مکعب واحد در V است و $\Psi'(B \times_W C_0) := \pi_W^{-1}(B) \cap \pi_V^{-1}(C_0)$. دو اندازه Φ' و Ψ' ارگودیک هستند و شدت آن‌ها با شدت Φ و Ψ برابرند. فرض کنید یک تخصیص موازنه‌گر τ' بین Φ' و Ψ' داشته باشیم که شرایط حکم مسئله را برای دو اندازه Φ' و Ψ' داشته باشد. در این صورت برای هر $v \in V$ و $w \in W$ تعریف کنید $\tau(v + w) := v + \tau'(w)$. به سادگی دیده می‌شود که τ یک تخصیص موازنه‌گر بین Φ و Ψ خواهد بود که شرایط حکم مسئله را دارد. بنابراین کافی است تخصیص τ' را بسازیم. برای این کار، می‌توان از ابتدا فرض کرد $V = \{0\}$.

طبق آنچه گفتیم، بدون کم شدن از کلیت فرض کنید $V = \{0\}$. زیرفضاهای جهت‌های ناوردای Φ و Ψ را V_1 و V_2 بنامید که طبق ارگودیک بودن غیر تصادفی هستند. همچنین $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. زیرفضاهای مکمل و متعامد V_1 و V_2 را به ترتیب W_1 و W_2 بنامید و اندازه‌های القا شده روی W_1 و W_2 مانند فوق را Φ' و Ψ' بنامید. زیرفضای جهت‌های ناوردای Φ' و Ψ' بدیهی اند. پس طبق مسئله ۲۲.۵ که درستی آن را فرض کرده‌ایم، دو فرآیند نقطه‌ای پایای Π_1 و Π_2 روی W_1 و W_2 وجود دارند که تابعی هم‌ورد و اندازه‌پذیر از Φ' و Ψ' هستند. از روی Π_1 و Π_2 یک زیرمجموعه گسسته از $\mathbb{R}^d$ به شرح زیر خواهیم ساخت.

برای $w_1 \in \Pi_1$ و $w_2 \in \Pi_2$ ، کم‌ترین فاصله نقاط دو زیرفضای آفین $\pi_{W_1}^{-1}(w_1)$ و $\pi_{W_2}^{-1}(w_2)$ را با $d(w_1, w_2)$ و نزدیک‌ترین نقطه زیرفضای اول به زیرفضای دوم را با $X(w_1, w_2)$ نشان دهید (توجه کنید که طبق فرض $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ ، این موارد خوش تعریف هستند). N را کوچک‌ترین عدد طبیعی بگیرید که زوج نقطه w_1, w_2 مانند فوق وجود داشته باشد که $d(w_1, w_2) < N$. تعریف کنید

$$\Pi := \{X(w_1, w_2) : w_1 \in \Pi_1, w_2 \in \Pi_2, d(w_1, w_2) < N\}.$$

به سادگی دیده می‌شود که Π یک زیرمجموعه گسسته ناتهی از $\mathbb{R}^d$ است و تابعی هم‌ورد و اندازه‌پذیر از Φ و Ψ است. □
حال حکم مسئله از قسمت (آ) از همین قضیه نتیجه می‌شود.

اثبات قضیه ۱۹.۵. با گسترش فضای نمونه، یک فرآیند نقطه‌ای مستقل از Φ و Ψ روی $\mathbb{R}^d$ در نظر بگیرید. حال حکم نتیجه مستقیمی از قضیه ۱۸.۵ است. $\square$

اثبات قضیه ۲۰.۵. با فرض درستی مسئله ۲۲.۵، وجود تخصیص موازنه‌گر هم‌ورد از قسمت (ب) از قضیه ۱۸.۵ نتیجه می‌شود. هم‌چنین در اثبات قضیه ۱۸.۵ یک روش ساختنی ارائه کرده‌ایم که از انتقال بهینه برای اندازه‌های متناهی با محمل فشرده استفاده کرده است. $\square$

۳.۵ ساختن تخصیص پایدار از راست در فضای یک بعدی

مطالب این بخش تعمیمی از مطالب فصل‌های ۵ و ۷ از [۱۲] هستند که در بخش ۴.۳ توضیح داده شده است. همان طور که گفتیم، این مطالب از دو جهت تعمیم [۱۲] هستند. یکی این که لازم نیست دو اندازه نسبت به هم تکین باشند و دیگر این که اندازه دوم می‌تواند اتم داشته باشد. فرض کنید φ و ψ دو اندازه روی $\mathbb{R}$ باشند. برای $x \in \mathbb{R}^d$ تعریف کنید

$$\tau(x) := \inf\{\xi \geq x : \varphi([x, \xi]) \leq \psi([x, \xi])\}. \quad (۱.۵)$$

در این رابطه قرارداد می‌کنیم $\inf \emptyset = +\infty$. مهم‌ترین قضیه این بخش قضیه زیر است که در آخر بخش آن را ثابت می‌کنیم. این قضیه پاسخی از مسائل باز ۱۴.۵ و ۱۵.۵ را در حالتی خاص ارائه می‌دهد. هم‌چنین مسئله‌ای مشابه مسئله ۱۳.۵، در مورد پایداری از راست، را در حالت یک‌بعدی حل می‌کند.

قضیه ۲۳.۵. در حالت یک بعدی، فرض کنید Φ و Ψ دو اندازه تصادفی پایا با شدت نمونه‌ای برابر باشند به طوری که فرض ۹.۵ برقرار است و به علاوه Φ بدون اتم است. در این صورت خواهیم داشت

آ. تخصیص ساخته شده توسط (۱.۵) تقریباً همیشه یک تخصیص (Φ, Ψ) -موازنه‌گر است.

ب. اگر τ' یک تابع تصادفی هم‌ورد باشد که تقریباً همیشه یک تخصیص پایدار از راست (تعریف ۲۷.۵) برای Φ و Ψ است، آنگاه حکم قسمت قبل برای τ' نیز برقرار است.

به طور خاص، در حالتی که $\Phi = \lambda_{\Psi} \mathcal{L}_d$ ، با فرض ۹.۵ یک الگوی نقطه اضافه غیر تصادفی به دست می‌آید.

نکته ۲۴.۵. توجه کنید که مشابه گزاره ۱۰.۵، فرض ۹.۵ برای وجود تخصیص موازنه‌گر پایدار از راست و الگوی نقطه اضافه غیر تصادفی پایدار از راست لازم است. البته، هم‌چنان ممکن است تخصیص موازنه‌گر هم‌وردی وجود داشته باشد که پایدار از راست نباشد (مثال ۴۱.۴ را ببینید). هم‌چنین برای یافتن الگوی نقطه اضافه غیر تصادفی پایدار برای Ψ ، فرض ۹.۵ ایجاب می‌کند که Ψ باید جاهای زیادی متحد با صفر باشد؛ به این معنی که یک مجموعه تصادفی با شدت مثبت وجود داشته باشد که تحدید Ψ به آن صفر باشد (البته این شرط کافی نیست).

پیش از تعریف پایداری از راست (تعریف ۲۷.۵) قضیه مهم دیگر این بخش را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲۵.۵. در حالت یک بعدی، فرض کنید $\varphi, \psi \in M$ داده شده باشند. در صورتی که φ بدون اتم باشد و فرض ۹.۵ برقرار باشد، تخصیص τ ساخته شده در (۱.۵) یک تخصیص شبه موازنه‌گر و پایدار از راست (طبق تعریف ۲۷.۵) برای φ و ψ است. به علاوه، τ به طور اندازه‌پذیر و هم‌ورد به φ و ψ بستگی دارد.

نکته ۲۶.۵. فرض کنید ν یک اندازه احتمال روی $\mathbb{R}$ باشد. اندازه‌های احتمال l° و l^ν در فرض ۲۹.۵ صدق میکنند و در حالتی که $\nu(\{0\}) = 0$ این دو اندازه نسبت به هم تکین هستند. مشابه قضیه ۴.۱ از [۱۲]، از قضیه ۲۳.۵ نتیجه میشود که در قضیه ۴.۱ از [۱۲] فرض $\nu(\{0\}) = 0$ لازم نیست. البته برای این کار باید مشابه [۱۲] این نتایج را در حالتی که $\mathbb{P}$ یک اندازه سیگما-متناهی است ثابت کنیم (بخش ۴.۳ را ببینید).

حال تخصیص پایدار از راست در فضای یک بعدی را تعریف می‌کنیم که مشابه تعریف تخصیص پایدار (تعریف ۲.۵) است، با این تفاوت که هر مکان تنها مرکزهای سمت راست خود را می‌خواهد و هر مرکز تنها مکان‌های سمت چپ خود را.

تعریف ۲۷.۵. در فضای یک بعدی، فرض کنید $\varphi, \psi \in M$ داده شده باشند و τ یک تخصیص شبه موازنه‌گر باشد (طبق تعریف ۲.۵) و داشته باشیم $\tau(x) \geq x$. با فرض دانستن τ ، می‌گوییم مکان $x_0 \in D$ راضی است هرگاه $\tau(x_0) \neq \infty$ و ناراضی است هرگاه $\tau(x_0) = \infty$ (با مکان‌های خارج D کاری نداریم). مرکز ξ را اشباع‌شده می‌گوییم هرگاه در محمل اندازه $\tau_*(\varphi|_D) - \tau_*(\psi|_D)$ نباشد. می‌گوییم مکان x_0 مرکز ξ را می‌خواهد هرگاه اولاً $\xi \geq x_0$ و ثانیاً یا x_0 ناراضی باشد و یا $\xi > \tau(x_0)$. می‌گوییم مرکز ξ مکان x_0 را می‌خواهد هرگاه اولاً $\xi \leq x_0$ ، ثانیاً $\tau(x_0) \neq \xi$ و ثالثاً یا ξ اشباع نشده باشد و یا مکان x_1 موجود باشد که $\tau(x_1) = \xi$ و $x_1 < x_0$. می‌گوییم τ پایدار از راست^۶ است هرگاه هیچ زوج (x_0, ξ_0) موجود نباشد که هر دو یکدیگر را بخواهند.

پیش از اثبات قضیه‌ها تعریف می‌کنیم.

$$f(t) := \begin{cases} \varphi([0, t)) - \psi([0, t)), & t \geq 0 \\ \psi([t, 0)) - \varphi([t, 0)), & t < 0 \end{cases}$$

با توجه به این که برای $t \geq s$ داریم

$$f(t) - f(s) = \varphi([s, t)) - \psi([s, t)),$$

تعریف τ در (۱.۵) معادل است با

$$\tau(x) = \inf\{\xi \geq x : f^+(\xi) \leq f(x)\} \quad (۲.۵)$$

که در آن $f^+(\xi) = \varphi([0, \xi]) - \psi([0, \xi])$ یعنی f در نقطه ξ است؛ به راحتی می‌بینیم که f از چپ پیوسته و نیم‌پیوسته از بالا است. نقاط ناپیوستگی f همان اتم‌های ψ هستند.

^۶Right-stable

لم ۲۸.۵. برای ψ -تقریباً هر نقطه ξ ، دنباله $\xi_n \downarrow \xi$ وجود دارد که $f(\xi_n) < f(\xi)$.

اثبات. توجه کنید که اگر ξ یک اتم ψ باشد حکم واضح است. ψ' را اندازه حاصل از ψ با حذف اتم‌ها تعریف کنید. به سادگی دیده می‌شود که $\varphi - \varphi|_A$ و $\psi' - \varphi|_A$ نیز در فرض (۹.۵) صدق می‌کنند و همچنین کافی است حکم را برای این دو اندازه ثابت کنیم. با توجه به این که این دو اندازه نسبت به هم تکیه هستند، ادعای مطلوب همان قسمت دوم لم ۳۰.۵ در [۱۲] است که از تکرار اثبات آن صرف نظر می‌کنیم. $\square$

طبق لم ۲۸.۵، داریم

$$\tau(x) = x, \quad \psi - a.e.$$

اثبات قضیه ۲۵.۵. طبق رابطه بالا، اگر به جای A ، اشتراک A با مجموعه $\{x : \tau(x) = x\}$ را قرار دهیم، از ابتدا می‌توانیم فرض کنیم τ روی A همانی است. همچنین، با جایگذاری $\varphi - \varphi|_A$ و $\psi - \varphi|_A$ به جای φ و ψ ، توابع τ و f تغییر نمی‌کنند و مشابه گزاره ۱۰.۵ حکم قضیه ۲۵.۵ نیز تغییر نمی‌کند. پس از این به بعد بدون کم شدن از کلیت مسئله شرط ۲۹.۵ را فرض می‌کنیم. حال ادعای قضیه نتیجه مستقیمی از نتیجه ۳۲.۵ و لم ۳۳.۵ است که در ادامه ثابت می‌کنیم. $\square$

فرض ۲۹.۵. دو اندازه φ و ψ نسبت به هم تکیه هستند. ψ روی A متمرکز است و φ روی A^c متمرکز است.

لم ۳۰.۵. اگر $x < y < \tau(x)$ آنگاه $\tau(y) \leq \tau(x)$.

در نتیجه اگر x راضی باشد (یعنی $\tau(x) < \infty$) و $x < y < \tau(x)$ ، آنگاه y هم راضی است (البته هنوز ثابت نکرده‌ایم که τ شبه موازنه‌گر است). تعبیر این لم این است که τ پایدار تحت جابجایی^۷ است؛ یعنی هیچ دو مکانی ترجیح نمی‌دهند مقادیر تخصیص داده شده توسط τ به آنها را با هم عوض کنند. همچنین این تصور مفید است که دوایر به قطر $[x, \tau(x)]$ نامقاطع هستند.

اثبات. اگر $\tau(x) = \infty$ چیزی برای اثبات نداریم. در غیر این صورت، طبق تعریف $\tau(x)$ داریم $\varphi([x, \tau(x)]) \leq \psi([x, \tau(x)])$ و $\psi([x, \tau(x)]) > \varphi([x, y])$. بنابراین $\varphi([y, \tau(x)]) < \psi([y, \tau(x)])$ و حکم از تعریف $\tau(y)$ نتیجه می‌شود. $\square$

لم ۳۱.۵. فرض کنید B یک مجموعه بول در بازه (a, b) باشد.

آ. داریم

$$\varphi(\tau^{-1}(B) \cap (a, b)) \leq \psi(B).$$

ب. فرض کنید روی بازه (a, b) داشته باشیم $f \geq f(a)$ ؛ به عنوان مثال وقتی $\tau(a) \geq b$. در این صورت $\tau^{-1}(B) \subseteq (a, b)$ و

$$\varphi(\tau^{-1}(B)) = \psi(B)$$

^۷Exchange stable

به عبارت دیگر، در حالت دوم همه مراکز بازه (a, b) اشباع شده‌اند (البته هنوز ثابت نکرده‌ایم که τ شبه موازنه‌گر است).

اثبات. در حالت دوم، حکم $\tau^{-1}(B) \subseteq (a, b)$ از تعریف τ نتیجه می‌شود. هر دو قسمت لم را با هم ثابت می‌کنیم. تعریف می‌کنیم

$$m(t) := \inf\{f(s) : s \in [t, b]\}.$$

برای این لم کافی است همه چیز را به بازه $[a, b]$ محدود کنیم. با توجه به این که f نیم‌پوسته از بالا است، m پیوسته است. حال $f - m$ تابعی از چپ پیوسته، نیم‌پوسته از بالا و نامنفی است و $f^+ - m$ تابعی از راست پیوسته، نیم‌پوسته از بالا و نامنفی است. به سادگی دیده می‌شود که مجموعه نقاطی که $f^+ - m > 0$ یک مجموعه باز است و بنابراین اجتماع شمارا بازه است. این بازه‌ها را بازه‌های خوب بنامید. پس در دو انتهای هر بازه خوب داریم که $f^+ = m$ ؛ مگر در نقطه b که داریم $f^+(b) \leq m(b)$ و در نقطه a که داریم $f^+(a) \geq m(a)$. هم‌چنین در حالت دوم لم داریم $f^+(a) = m(a)$.

فرض کنید (a', b') یک بازه خوب باشد. در این بازه m ثابت است؛ زیرا اگر مثلاً $m(t) < m(b')$ ، آنگاه نقطه ماکسیمال t' در این بازه وجود دارد که $m(t') = m(t)$ و به ازای این نقطه داریم $f^+(t') = m(t')$ که تناقض است. بنابراین از $f^+(b') \leq m(b')$ (به ازای $b' \neq b$ تساوی رخ می‌دهد) نتیجه می‌گیریم که روی این بازه داریم $f^+ > f^+(b')$. بنابراین طبق (۲.۵)، روی این بازه داریم $\tau \leq b'$.

ابتدا فرض کنید $a' \neq a$ و $b' \neq b$. پس با توجه به $f^+(a') = f^+(b')$ نتیجه می‌گیریم که $\varphi((a', b']) = \psi((a', b'))$. حال فرض کنید $a' \neq a$ اما $b' = b$. داریم $f(b) = m(b)$ و بنابراین $f^+(a') = f(b)$ و نتیجه می‌گیریم $\varphi((a', b)) = \psi((a', b))$. در نهایت فرض کنید $a = a'$. در حالت دوم لم داریم $f^+(a) = m(a)$ و همان روابط قبل برقرار است. پس فرض کنید $f^+(a) > m(a)$. مشابه قبل، در صورتی که $b' \neq b$ نتیجه می‌گیریم $\varphi((a, b']) = \psi((a, b')) + f^+(a) - m(a)$ و در صورتی که $b' = b$ نتیجه می‌گیریم $\varphi((a, b)) = \psi((a, b)) + f^+(a) - m(a)$.

طبق بند قبل، اگر C اجتماع تمام بازه‌های به شکل $(a', b']$ باشد که (a', b') یک بازه خوب است، داریم $\varphi(C \setminus \{b\}) = \psi(C \setminus \{b\}) + f^+(a) - m(a)$. حال فرض کنید $t \in C^c$. داریم $f^+(t) = m(t)$ و بنابراین روی بازه $[t, b]$ داریم $f^+ \geq f^+(t)$. بنابراین یا $\tau(t) = t$ (در صورتی که t اتمی از ψ باشد) یا f^+ در بازه‌های به شکل $[t, t + \epsilon]$ ثابت باشد و یا $\tau(t) \geq b$ (در غیر این صورت). با استفاده از این رابطه، به دست می‌آوریم $\varphi(\{t \in C^c : \tau(t) = t\}) = 0$. هم‌چنین، طبق لم ۲۸.۵ به دست می‌آوریم $\psi(C^c) = 0$. از این روابط به دست می‌آوریم

$$\varphi(\tau^{-1}((a, b)) \cap (a, b)) = \psi((a, b)) + f^+(a) - m(a). \quad (۳.۵)$$

حال کافی است حکم را به ازای $B := [c, d] \subseteq (a, b)$ ثابت کنیم. آن چه تا کنون ثابت کرده‌ایم برای بازه‌های

(a, c) و (a, d) نیز معتبر است. بنابراین طبق (۳.۵) برای این دو بازه به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\varphi(\tau^{-1}((a, d)) \cap (a, b)) &= \psi((a, d)) + f^+(a) - \inf\{f(s) : s \in [t, d]\}, \\ \varphi(\tau^{-1}((a, c)) \cap (a, b)) &= \psi((a, c)) + f^+(a) - \inf\{f(s) : s \in [t, c]\}.\end{aligned}$$

از تفاضل این دو رابطه نتیجه می‌شود $\varphi(\tau^{-1}(B) \cap (a, b)) \leq \psi(B)$ و در حالت دوم لم به دست می‌آوریم $\varphi(\tau^{-1}(B) \cap (a, b)) = \psi(B)$. پس حکم ثابت شده است. $\square$

نتیجه ۳۲.۵. τ یک تخصیص شبه موازنه‌گر است.

اثبات. کافی است به ازای هر مجموعهٔ بول کران‌دار B داریم $\varphi(\tau^{-1}(B)) \leq \psi(B)$. برای بازهٔ (a, b) شامل B ، از لم ۳۱.۵ استفاده می‌کنیم و a را به $-\infty$ میل می‌دهیم. به این صورت حکم نتیجه می‌شود. $\square$

لم ۳۳.۵. τ پایدار از راست است.

اثبات. طبق نتیجهٔ ۳۲.۵، شبه موازنه‌گر است. فرض کنید مکان x مرکز $\xi \geq x$ را بخواهد. در نتیجه یا $\tau(x) > \xi$ و یا $\tau(x) = \infty$. در هر دو حال، $b > \xi$ یافت می‌شود که $\tau(x) \geq b$. پس طبق قسمت دوم لم ۳۱.۵ برای بازهٔ (x, b) به دست می‌آوریم که $\psi - \tau_*(\varphi)$ روی بازهٔ (x, b) متحد با صفر است. پس ξ اشباع شده است. همچنین طبق همان لم $\tau^{-1}(\xi) \subseteq (x, \infty)$. بنابراین طبق تعریف، مرکز ξ مکان x را نمی‌خواهد و حکم ثابت می‌شود. $\square$

نکته ۳۴.۵. در حالت غیر تصادفی، شرط ساده‌ای وجود دارد برای تضمین این که تخصیص ساخته شده در (۱.۵) موازنه‌گر باشد، بر خلاف هستهٔ انتقال مکان-بهمینه که چنین شرطی شناخته شده نیست. فرض کنید φ و ψ دو اندازه روی $\mathbb{R}$ باشند که فرض ۹.۵ برقرار است و به علاوه φ بدون اتم است. در این صورت تخصیص ساخته شده در (۱.۵) موازنه‌گر است اگر و تنها اگر

$$\begin{aligned}\inf f &= \liminf_{t \rightarrow \infty} f(t) = \liminf_{t \rightarrow -\infty} f(t), \\ \sup f &= \limsup_{t \rightarrow \infty} f(t) = \limsup_{t \rightarrow -\infty} f(t).\end{aligned}$$

اثبات این موضوع مشابه قضیهٔ ۲۵.۵ است و از تکرار آن خودداری می‌کنیم.

اثبات قضیهٔ ۲۳.۵. ایدهٔ اثبات این قضیه مشابه قضیهٔ ۱۶.۴ است. طبق قضیهٔ تجزیهٔ ارگودیک، می‌توانیم فرض کنیم Φ و Ψ ارگودیک هستند و دارای شدت برابر هستند. مجموعهٔ مکان‌های اشباع نشده را A و مجموعهٔ مرکزهای اشباع نشده را B بنامید. هستهٔ انتقال وزن‌دار T را در نظر بگیرید که در حالتی که $\tau(x) \neq \infty$ به صورت $T(x, \cdot) := \delta_{\tau(x)}$ و در حالتی که $\tau(x) = \infty$ به صورت $T(x, \cdot) := 0$ تعریف می‌شود. با توجه به این که τ شبه موازنه‌گر است، مشابه لم ۳۰.۱ می‌توان هستهٔ انتقال وزن‌دار هم‌ورد T^* را در نظر گرفت که دوگان T باشد.

طبق اصل انتقال جرم (قضیه ۳۱.۱) برای تابع $h = 1$ ، برای یک مجموعه بول C که $0 < \mathcal{L}(C) < \infty$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\Phi[0 \in A^c] &= \mathbb{E}_\Phi[T(0, \mathbb{R}^d)] = \mathbb{E}_\Psi[T^*(0, \mathbb{R})] \\ &= \frac{1}{\lambda \mathcal{L}(C)} \mathbb{E} \left[\int_C T^*(\xi, \mathbb{R}) \Psi(d\xi) \right] \\ &= \frac{1}{\lambda \mathcal{L}(C)} \mathbb{E} [\Phi(\tau^{-1}(C))] \end{aligned} \quad (4.5)$$

که در آن λ شدت مشترک Φ و Ψ است. تساوی آخر از تعریف T^* نتیجه می‌شود. توجه کنید که با توجه به شبه موازنه‌گر بودن τ ، سمت راست کم‌تر یا مساوی با $1 = \frac{1}{\lambda \mathcal{L}(C)} \mathbb{E} [\Psi(C)]$ است. دو حالت در نظر می‌گیریم. ابتدا فرض کنید $1 = \mathbb{P}_\Phi[0 \in A^c]$. بنابراین تقریباً همیشه $0 = \Phi(A)$. هم‌چنین طبق (۴.۵) داریم

$$1 = \frac{1}{\lambda \mathcal{L}(C)} \mathbb{E} [\Phi(\tau^{-1}(C))] \leq \frac{1}{\lambda \mathcal{L}(C)} \mathbb{E} [\Psi(C)] = 1.$$

بنابراین تقریباً همیشه $\Phi(\tau^{-1}(C)) = \Psi(C)$. با جایگذاری بازه‌های گویا به جای C ، نتیجه می‌گیریم که τ تقریباً همیشه (Φ, Ψ) -موازنه‌گر است. در حالت دیگر، فرض کنید $1 > \mathbb{P}_\Phi[0 \in A^c]$. در نتیجه با احتمال مثبت $0 \neq \Phi(A)$. با توجه به ارگودیک بودن تقریباً همیشه این اتفاق می‌افتد. پس طبق لم ۶.۱ تقریباً همیشه $\Phi|_A$ به هر نیم‌فضا بی‌نهایت نسبت می‌دهد. هم‌چنین طبق (۴.۵) به دست می‌آوریم $\mathbb{E} [\Phi(\tau^{-1}(C))] < \mathbb{E} [\Psi(C)]$. پس با احتمال مثبتی داریم $\Phi(\tau^{-1}(C)) < \Psi(C)$ و بنابراین $0 < \Psi(B)$. طبق ارگودیک بودن این اتفاق تقریباً همیشه رخ می‌دهد. بنابراین طبق لم ۶.۱ تقریباً همیشه $\Psi|_B$ به هر نیم‌فضا بی‌نهایت نسبت می‌دهد. حال پیشامدی را در نظر بگیرید که $\Phi|_A$ و $\Psi|_B$ به هر نیم‌فضا بی‌نهایت نسبت دهند. $x \in A$ را به دلخواه در نظر بگیرید. در بازه (x, ∞) یک عضو B مانند ξ وجود دارد. حال x یک مکان اشباع نشده و ξ یک مرکز اشباع نشده است. پس x و ξ یکدیگر را می‌خواهند و این با پایداری τ (قضیه ۲۵.۵) متناقض است. $\square$

فصل ۶

هسته انتقال ورونوی برای یک اندازه

در این فصل مفهوم هسته انتقال ورونوی برای یک اندازه را ارائه می‌کنیم که تعمیمی از سلول بندی ورونوی برای یک زیرمجموعه گسسته $\mathbb{R}^d$ است. هرچند از این مفهوم تنها برای اثبات قضیه ۲۹.۴ استفاده می‌کنیم، اما به تنهایی مفهوم جالبی برای مطالعه به نظر می‌رسد. برخی خواص این مفهوم را در این فصل بررسی می‌کنیم.

۱.۶ تعریف و خواص اولیه

تعریف ۱.۶. فرض کنید ψ یک اندازه روی $\mathbb{R}^d$ باشد به طوری که $\psi(\mathbb{R}^d) \geq 1$. برای $x_0 \in \mathbb{R}^d$ تعریف کنید

$$s(x_0) := \sup\{s : \psi(B_s^\circ(x_0)) < 1\} = \inf\{s \in \mathbb{R} : \psi(B_s(x_0)) \geq 1\}.$$

برای $x_0, \xi \in \mathbb{R}^d$ تعریف کنید

$$v(x_0, \xi) := \begin{cases} 1, & |x_0 - \xi| < s(x_0), \\ c, & |x_0 - \xi| = s(x_0), \\ 0, & |x_0 - \xi| > s(x_0), \end{cases}$$

که در آن c عددی در $[0, 1]$ است به طوری که داشته باشیم $\int v(x_0, \xi) \psi(d\xi) = 1$. در حالتی که $\psi(\partial B_{s(x_0)}(x_0)) = 0$ قرار می‌دهیم $c = 0$. چگالی انتقال ورونوی^۱ و هسته انتقال ورونوی^۲ برای ψ را به ترتیب تابع v و هسته انتقال $V(x, \cdot) := \int v(x, \cdot) \psi(d\xi)$ تعریف می‌کنیم. قلمرو ورونوی^۳ مرکز ξ (با معلوم بودن ψ) برابر با مجموعه $\{x \in \mathbb{R}^d : s(x) \geq |x - \xi|\}$ تعریف می‌شود.

توجه کنید که هسته انتقال ورونوی همان تابع A_1 در الگوریتم ۵.۴ است. البته تعریف قلمرو ورونوی اندکی با تعریف قلمرو یک چگالی انتقال فرق دارد. این تعریف بیش‌تر در بخش ۲.۶ مورد نیاز است. برای نیازهای فصل ۴ (گزاره ۵.۶) می‌توان از تعریف دیگر نیز استفاده کرد.

^۱Voronoi transport density

^۲Voronoi transport kernel

^۳Voronoi territory

نکته ۲.۶. فرض $\psi(\mathbb{R}^d) \geq 1$ تضمین می‌کند که هسته انتقال ورونوی واقعاً یک هسته انتقال بدون وزن است. اگر ψ اندازه شمارشی روی مجموعه گسسته Ξ باشد، آنگاه قلمروهای ورونوی برای ψ همان سلول‌بندی ورونوی برای Ξ را ارائه می‌دهند. بنابراین مفهوم هسته انتقال ورونوی تعمیمی از سلول‌بندی ورونوی است.

لم ۳.۶. نقطه x در قلمرو ورونوی مرکز ξ است اگر و تنها اگر برای هر $\epsilon > 0$ داشته باشیم $\psi(B_{|x-\xi|-\epsilon}(x)) < 1$. اثبات این لم ساده است و از آوردن آن صرف نظر می‌کنیم.

لم ۴.۶. قلمرو ورونوی مرکز ξ یک مجموعه بسته و ستاره‌وار به مرکز ξ است، اما لزوماً محدب نیست.

اثبات. طبق لم ۳.۶ به سادگی دیده می‌شود که قلمرو ورونوی ξ ستاره‌وار است. به عنوان مثالی برای قلمروهای ورونوی غیر محدب، فرض کنید $\psi = \frac{1}{4}(\delta_a + \delta_b + \delta_c)$ که a, b و c رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع در صفحه هستند. اگر o مرکز این مثلث باشد، قلمرو ورونوی a نقاطی است که داخل زاویه boc نیستند. در ادامه بسته بودن قلمروهای ورونوی را ثابت می‌کنیم. قلمرو ξ را C بنامید. فرض کنید $x_i \in C$ برای $i \in \mathbb{N}$ و $x_i \rightarrow x$ برای هر $\epsilon > 0$ ، اگر $|x - x_i| < \frac{\epsilon}{4}$ ، آنگاه $B_{|x-\xi|-\frac{\epsilon}{4}}(x_i) \subseteq B_{|x-\xi|-\epsilon}(x)$. با توجه به این رابطه حکم از لم ۳.۶ نتیجه می‌شود. $\square$

گزاره ۵.۶. اگر ψ به هر نیم‌فضا اندازه بینهایت نسبت دهد، آنگاه تمام قلمروهای ورونوی برای ψ کران‌دار هستند. به طور خاص، اگر Ψ یک اندازه تصادفی پایا باشد که تقریباً همیشه ناصفر است، آنگاه تقریباً همیشه همه قلمروهای ورونوی برای Ψ کران‌دار هستند.

هرچند این گزاره نتیجه مستقیمی از گزاره ۱۲.۶ است که در ادامه می‌آوریم، اما با توجه به این که این گزاره برای اهداف فصل ۴ کافی است، اثبات آن را جداگانه به صورت مختصر می‌آوریم.

اثبات گزاره ۵.۶. فرض کنید قلمرو ورونوی ξ ، که آن را C می‌نامیم، بی‌کران باشد. با توجه به لم ۴.۶، نیم‌خط l با نقطه شروع ξ وجود دارد که کاملاً در C قرار دارد. به ازای $x \in l$ طبق نکته ۳.۶ داریم $\psi(B_{|x-\xi|}^\circ(x)) \leq 1$. با در نظر گرفتن اجتماع به ازای تمام $x \in l$ یک نیم‌فضای H به دست می‌آوریم که مرز آن عمود بر l است و $\psi(H) \leq 1$. این یک تناقض است. برای اندازه تصادفی Ψ که تقریباً همیشه ناصفر باشد، از لم ۶.۱ به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که Ψ تقریباً همیشه به هر نیم صفحه اندازه بی‌نهایت نسبت می‌دهد و حکم ثابت می‌شود. $\square$

لم ۶.۶. اگر ψ روی یک مجموعه گسسته متمرکز باشد، آنگاه همه قلمروهای ورونوی برای ψ چندوجهی توپُر هستند.

اثبات. فرض کنید محمل ψ مجموعه گسسته $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots\}$ باشد. با نمادهای تعریف ۱.۶، فرض کنید A مجموعه نقاطی مثل $x \in \mathbb{R}^d$ باشد که $\partial B_{s(x)}(x)$ شامل بیش از یک اتم ψ باشد. در هر مؤلفه همبندی A^c ، مجموعه اتم‌های عضو $B_{s(x)}(x)$ ثابت است. بنابراین همه قلمروهای ورونوی ψ محدود به A هستند. داریم

که در آن $A \subseteq \cap_{i,j} A_{i,j}$ هر $A_{i,j} := \{x : \{\xi_i, \xi_j\} \subseteq \partial B_{s(x)}(x)\}$ زیرمجموعه یک ابرصفحه است (ابرفصله عمود منصف ξ_i و ξ_j). بنابراین با توجه به ستاره‌وار و بسته بودن قلمروهای ورونوی کافی است ثابت کنیم هر مجموعه فشردۀ $K \subseteq \mathbb{R}^d$ تنها تعداد متناهی از $A_{i,j}$ ها را قطع می‌کند. مجموعه فشردۀ S را طوری بگیرید که $\psi(S) > 1$ (در حالت $\psi(\mathbb{R}^d) = 1$ حکم بدیهی است). هیچ یک از گوی‌های باز $B_{s(x)}^\circ(x)$ به ازای $x \in K$ نمی‌تواند شامل S باشد. بنابراین مجموعه فشردۀ T وجود دارد که همه این گوی‌های باز را در بر دارد. حال اگر $A_{i,j}$ با K اشتراک داشته باشد، آن‌گاه ξ_i و ξ_j در T قرار دارند. بنابراین تعداد چنین زوج‌هایی متناهی است و حکم ثابت می‌شود. $\square$

۲۰۶ پوش محدب ملایم یک اندازه

در این بخش شرط لازم و کافی برای کران‌دار بودن یک قلمرو ورونوی برای ψ را بررسی می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که برای مجموعه گسسته $\Xi \subseteq \mathbb{R}^d$ ، سلول ورونوی متناظر با نقطه $\xi \in \Xi$ کران‌دار است اگر و تنها اگر ξ نقطه‌ای از درون پوش محدب Ξ باشد. تعمیم این خاصیت را در گزاره ۱۲۰۶ بیان می‌کنیم.

تعریف ۷۰۶. فرض کنید ψ یک اندازه روی $\mathbb{R}^d$ باشد. نیم‌فضای بسته $H \subseteq \mathbb{R}^d$ را یک نیم‌فضای حامل^۴ برای ψ می‌نامیم هرگاه $\psi(H^c) \leq 1$ و برای هر زیرمجموعه فشردۀ $K \subseteq H^c$ داشته باشیم $\psi(K) < 1$. پوش محدب ملایم^۵ ψ اشتراک تمام نیم‌فضاهای حامل برای ψ است.

مثال‌های زیر کمک می‌کنند تا پوش محدب ملایم را راحت‌تر تصور کنیم.

مثال ۸۰۶. اگر ψ اندازه شمارشی روی یک مجموعه گسسته Ξ باشد، آن‌گاه پوش محدب ملایم ψ همان پوش محدب Ξ است.

مثال ۹۰۶. فرض کنید $a \geq 0$ و $K \subseteq [a, \infty) \times \mathbb{R}$ یک مجموعه محدب فشردۀ باشد به طوری که $\mathcal{L}(K) = 1$ و $K \cap (\{a\} \times \mathbb{R}) \neq \emptyset$. تحدید اندازه لبگ به $K \cup ((-\infty, 0] \times \mathbb{R})$ را ψ بنامید. در این حالت پوش محدب ملایم ψ همان نیم‌صفحه $\{(x, y) : x \leq a\}$ است.

مثال ۱۰۰۶. فرض کنید $a_1, a_2, \dots$ نقاطی روی خط $x = 1$ در صفحه باشند که به بینهایت میل می‌کنند و ψ جمع اندازه $\sum_i 2^{-i} \delta_{a_i}$ با تحدید اندازه لبگ به $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}$ باشد. در این صورت پوش محدب ملایم ψ همان نیم‌صفحه $\{(x, y) : x \leq 0\}$ است. این مثال را با مثال قبل مقایسه کنید.

لم ۱۱۰۶. نیم‌فضاهای حامل در خواص زیر صدق می‌کنند.

^۴Supporting half-space

^۵Mild convex hull

۱. اگر H یک نیم فضای حامل برای ψ باشد و $H' \supseteq H$ یک نیم فضای بسته، آنگاه H' نیز یک نیم فضای حامل برای ψ است.

۲. فرض کنید $H_i = \{x : (x - a_i) \cdot v_i \geq 0\}$ به ازای $i \in \mathbb{N}$ و $H = \{x : (x - a) \cdot v \geq 0\}$. اگر H_i ها نیم فضاهای حامل برای ψ باشند، $a_i \rightarrow a$ و $v_i \rightarrow v$ ، آنگاه H نیز یک نیم فضای حامل است.

۳. به ازای بردار یکه v ، فرض کنید $a(v)$ بزرگترین عدد حقیقی a باشد که $\{x : x \cdot v \geq a\}$ یک نیم فضای حامل است. تابع a نیم پیوسته از پایین است.

اثبات. قسمت (۱) واضح است. قسمت (۲) نیز نتیجه ساده ای از قسمت (۲) است. حال قسمت (۲) را ثابت می کنیم. به سادگی دیده می شود که

$$H^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} H_m^c.$$

بنابراین نتیجه می گیریم که $\psi(H^c) \leq 1$. همچنین اگر $K \subseteq H^c$ فشرده باشد، به ازای n های به اندازه کافی بزرگ داریم $K \subseteq H_n^c$ و در نتیجه $\psi(K) < 1$. پس حکم نتیجه می شود. $\square$

گزاره ۱۲.۶. فرض کنید ψ یک اندازه روی $\mathbb{R}^d$ باشد. قلمرو ورونوی ξ کران دار است اگر و تنها اگر ξ عضوی از درون پوش محدب ملایم ψ باشد.

اثبات. ابتدا فرض کنید قلمرو ورونوی ξ ، که آن را D می نامیم، بی کران است. از لم ۴.۶، نتیجه می گیریم که نیم خط l با نقطه شروع ξ وجود دارد که کاملاً در D قرار دارد. برای $x \in l$ ، چون x در قلمرو ورونوی ξ است، داریم $\psi(B_{|x-\xi|}^\circ(x)) \leq 1$. با اجتماع روی نقاط $x \in l$ به دست می آوریم $\psi(H^c) \leq 1$ که H نیم فضای بسته ای است که مرز آن شامل ξ است و بر l عمود است. همچنین، برای هر مجموعه فشرده $K \subseteq H^c$ ، نقطه $x \in l$ و $\epsilon > 0$ وجود دارد که $K \subseteq B_{|x-\xi|-\epsilon}^\circ(x)$ و از لم ۳.۶ نتیجه می گیریم که $\psi(K) < 1$. بنابراین H یک نیم فضای حامل برای ψ است. از $x \in \partial H$ نتیجه می گیریم که x عضوی از درون پوش محدب ملایم ψ نیست. به عکس، فرض کنید D کران دار باشد و H را یک نیم فضای حامل برای ψ بگیرد. نقطه $x \in H^c \setminus D$ یافت می شود که خط واصل x و ξ بر مرز H عمود باشد. طبق لم ۳.۶، $\epsilon > 0$ یافت می شود که $\psi(B_{|x-\xi|-\epsilon}(x)) \geq 1$. بنابراین نیم فضای $\{y : (y - \xi) \cdot (x - \xi) \geq 0\}$ یک نیم فضای حامل نیست و در نتیجه $\xi \in H^\circ$. طبق نمادهای لم ۱۱.۶ و قسمت (۲) از آن لم داریم $\xi \cdot v > a(v)$. از قسمت (۳) از همان لم نتیجه می شود که $\xi \cdot v - a(v)$ به ازای بردارهای یکه v مینیمم ناصفر دارد و در نتیجه ξ درون پوش محدب ملایم ψ است و حکم ثابت می شود. $\square$

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Group coupling	جفت‌سازی تحت عمل گروه	Allocation	تخصیص
Intensity	شدت	Almost all (a.a.)	تقریباً هر
Intensity measure	اندازه شدت	Almost everywhere (a.e.)	تقریباً همه جا
Inversion formula	فرمول انعکاس	Almost sure (a.s.)	تقریباً همیشه
Local time	مکان موضعی	Application Function	تابع درخواست
Locally finite	موضعی متناهی	Application radius	شعاع درخواست
Mass transport	انتقال جرم	Balancing	موازنه‌گر
Mass transport principle	اصل انتقال جرم	Bernoulli point process	فرآیند نقطه‌ای برنولی
Mild convex hull	پوش محدب ملایم	Borel space	فضای بورل
Modified Palm	نسخه پالم اصلاح شده	Brownian motion	حرکت براونی
	distribution	Center	مرکز
Modified Palm	اندازه پالم اصلاح شده	Center-optimal	مرکز-بهینه
	distribution	Center-optimal	چگالی انتقال مرکز-بهینه
			transport density
Non-randomized	الگوی نقطه اضافه غیر تصادفی	Constrained	مقید
	extra head scheme	Counting measure	اندازه شمارشی
Non-weighted	بدون وزن	Covariant	هم‌ورد
Palm distribution	توزیع پالم	Dirac measure	اندازه دیراک
Palm version	نسخه پالم	Distribution	توزیع
Point process	فرآیند نقطه‌ای	Dual	دوگان
Poisson point process	فرآیند نقطه‌ای پواسون	Ergodic	ارگودیک
Random measure	اندازه تصادفی	Exchange-stability	پایداری تحت جابجایی
Random tessellation	کاشی‌کاری تصادفی	Exhausted	راضی
Rejection function	تابع رد	Extra head scheme	الگوی نقطه اضافه
Rejection Radius	شعاع رد		

Unimodular random graph	گراف تصادفی تک‌پیمانه‌ای	Right-stable	پایدار از راست
Unsated	اشباع‌نشده	Sample intensity	شدت نمونه‌ای
Voronoi territory	قلمرو ورونوی	Sated	اشباع‌شده
Voronoi transport	چگالی انتقال ورونوی	Semi-continuous	شبه پیوسته
	density	Shift coupling	جفت‌سازی انتقالی
Voronoi transport kernel	هسته انتقال ورونوی	Simple counting measure	اندازه شمارشی ساده
		Site	مکان
		Site-optimal	مکان-بهینه
		Site-optimal	چگالی انتقال مکان-بهینه
			transport density
		Site-optimal	هسته انتقال مکان-بهینه
			transport kernel
		Size-biased	مقدار-اریب شده
		Stable	پایدار
		Stationary	پایا
		Stationary measure	توزیع پایا
		Stationary random	اندازه تصادفی پایا
			measure
		Sub-balancing	شبه موازنه‌گر
		Subspace of	زیرفضای جهت‌های ناورد
			invariant directions
		Support	محمل
		Supporting half-space	نیم‌فضای حامل
		Territory	قلمرو
		Transport density	چگالی انتقال
		Transport kernel	هسته انتقال
		Transport map	نگاشت انتقال
		Transport measure	اندازه انتقال
		Unbiased shift	شیفت نااریب
		Unexhausted	ناراضی

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Rejection function	تابع رد	Ergodic	ارگودیک
Allocation	تخصیص	Sated	اشباع شده
Almost all (a.a.)	تقریباً هر	Unsated	اشباع نشده
Almost everywhere (a.e.)	تقریباً همه جا	Mass transport principle	اصل انتقال جرم
Almost sure (a.s.)	تقریباً همیشه	Extra head scheme	الگوی نقطه اضافه
Distribution	توزیع	Non-randomized	الگوی نقطه اضافه غیر تصادفی
Palm distribution	توزیع پالم	extra head scheme	
Stationary measure	توزیع پایا	Mass transport	انتقال جرم
Shift coupling	جفت سازی انتقالی	Transport measure	اندازه انتقال
Group coupling	جفت سازی تحت عمل گروه	Modified Palm	اندازه پالم اصلاح شده
		distribution	
Transport density	چگالی انتقال	Random measure	اندازه تصادفی
Center-optimal	چگالی انتقال مرکز-بهینه	Stationary random	اندازه تصادفی پایا
	transport density	measure	
Site-optimal	چگالی انتقال مکان-بهینه	Dirac measure	اندازه دیراک
	transport density	Intensity measure	اندازه شدت
Voronoi transport	چگالی انتقال ورونوی	Counting measure	اندازه شمارشی
	density	Simple counting measure	اندازه شمارشی ساده
Brownian motion	حرکت براونی	Non-weighted	بدون وزن
Dual	دوگان	Stationary	پایا
Exhausted	راضی	Stable	پایدار
Subspace of	زیرفضای جهت های ناورد	Right-stable	پایدار از راست
	invariant directions	Exchange-stability	پایداری تحت جابجایی
Semi-continuous	شبه پیوسته	Mild convex hull	پوش محدب ملایم
		Application Function	تابع درخواست

Modified Palm	نسخه پالم اصلاح شده	Sub-balancing	شبه موازنه گر
distribution		Intensity	شدت
Transport map	نگاشت انتقال	Sample intensity	شدت نمونه ای
Supporting half-space	نیم فضای حامل	Application radius	شعاع درخواست
Transport kernel	هسته انتقال	Rejection Radius	شعاع رد
Site-optimal	هسته انتقال مکان-بهینه	Unbiased shift	شیفت نااریب
transport kernel		Point process	فرآیند نقطه ای
Voronoi transport kernel	هسته انتقال ورونوی	Bernoulli point process	فرآیند نقطه ای برنولی
Covariant	همورد	Poisson point process	فرآیند نقطه ای پواسون
		Inversion formula	فرمول انعکاس
		Borel space	فضای بورل
		Territory	قلمرو
		Voronoi territory	قلمرو ورونوی
		Random tessellation	کاشی کاری تصادفی
		Unimodular random graph	گراف تصادفی تک پیمانه ای
		Support	محمل
		Center	مرکز
		Center-optimal	مرکز-بهینه
		Size-biased	مقدار-اریب شده
		Constrained	مقید
		Site	مکان
		Local time	مکان موضعی
		Site-optimal	مکان-بهینه
		Balancing	موازنه گر
		Locally finite	موضعی متناهی
		Unexhausted	ناراضی
		Palm version	نسخه پالم

نمایه

- ارگودیک، ۱۱
 اشباع شده، ۴۶، ۷۰، ۷۷
 اشباع نشده، ۴۶
 اصل انتقال جرم، ۱۹، ۲۰
 الگوی نقطه اضافه، ۲۳، ۳۳، ۴۵
 الگوی نقطه اضافه غیر تصادفی، ۳۳
 انتقال جرم، ۱۳
 اندازه انتقال، ۱۳، ۱۶
 اندازه تصادفی، ۶
 اندازه تصادفی پایا، ۸
 اندازه دیراک، ۶
 اندازه شدت، ۸
 اندازه شمارشی، ۶
 اندازه شمارشی ساده، ۵
 اندازه پالم اصلاح شده، ۲۹
 بازسازی از اندازه پالم، ۲۶، ۴۵
 بدون وزن، ۱۴، ۱۶
 تابع درخواست، ۴۳، ۴۴
 تابع رد، ۴۴
 تخصیص، ۱۴، ۶۹
 توزیع، ۷
 توزیع پالم، ۹
 توزیع پایا، ۷
 جفت سازی انتقالی، ۲۴
 جفت سازی تحت عمل گروه، ۲۴
 حرکت براونی، ۳۸
 دوگان، ۱۸
 راضی، ۴۶، ۷۰، ۷۷
 زیرفضای جهت های ناورد، ۷۴
 شبه موازنه گر، ۴۱، ۷۰
 شبه پیوسته، ۷۲
 شدت، ۸
 شدت نمونه ای، ۲۷، ۳۱
 شعاع درخواست، ۴۳، ۴۴
 شعاع رد، ۴۳، ۴۴
 شیفت نااریب، ۳۸
 فرآیند نقطه ای، ۶
 فرآیند نقطه ای برنولی، ۲۳
 فرآیند نقطه ای پواسون، ۲۳
 فرمول انعکاس، ۲۱
 فرمول جابجایی نوو، ۲۰
 فرمول مکه، ۲۰
 فرمول کمپبل، ۱۱
 فضای بول، ۷
 قضیه ارگودیک بیرکهف، ۱۲
 قضیه اسلیونیاک-مکه، ۲۳
 قضیه تجزیه ارگودیک، ۱۲
 قضیه تجزیه اندازه، ۱۶
 قلمرو، ۵۱

قلمرو ورونوی، ۸۳
 محمل، ۵
 مرکز، ۴۲
 مرکز-بهینه، ۴۴، ۵۰
 مقدار-اریب شده، ۲۹
 مقید، ۴۱
 موازنه‌گر، ۱۴، ۱۶، ۴۱، ۶۹
 موضعاً متناهی، ۵
 مکان، ۴۲
 مکان موضعی، ۳۸
 مکان-بهینه، ۴۳، ۵۰
 ناراضی، ۴۶، ۷۰، ۷۷
 نسخهٔ پالم، ۱۰
 نسخهٔ پالم اصلاح شده، ۱۱
 نگاشت انتقال، ۱۴
 نیم‌فضای حامل، ۸۵
 هستهٔ انتقال، ۱۳، ۱۶
 هستهٔ انتقال مکان-بهینه، ۴۴
 هستهٔ انتقال ورونوی، ۸۳
 هم‌ورد، ۸
 پایا، ۸
 پایدار، ۴۶، ۷۰
 پایدار از راست، ۷۷
 پایداری تحت جابجایی، ۳۸
 پوش محدب ملایم، ۸۵
 چگالی انتقال، ۱۳، ۱۶
 چگالی انتقال مرکز-بهینه، ۴۴
 چگالی انتقال مکان-بهینه، ۴۴
 چگالی انتقال ورونوی، ۸۳
 کاشی‌کاری تصادفی، ۲۰
 گراف تصادفی تک‌پیمانه‌ای، ۱۸

کتابنامه

- [۱] Aldous, D. and Lyons, R. (2007). Processes on unimodular random networks. *Electron. J. Probab.* **12(54)**, 1454-1508.
- [۲] Chatterjee, S., Peled, R., Peres, Y. and Romik, D. (2010). Gravitational allocation to Poisson points. *Annals of mathematics*, .617-671
- [۳] Daley, D. J. and Vere-Jones, D. (2007). *An introduction to the theory of point processes: volume II: general theory and structure*. Springer Science & Business Media.
- [۴] Gale, D. and Shapley, L. S. (1962). College admissions and the stability of marriage. *Amer. Math. Monthly*, 9-15.
- [۵] Haji-Mirsadeghi, M. and Khezeli, Ali. (2016). Stable transports between stationary random measures. *Electron. J. Probab.* **21(51)**, 25 pp. doi:10.1214/16.-EJP4237. <http://projecteuclid.org/euclid.ejp/1470414022>.
- [۶] Hoffman, C., Holroyd, A. E. and Peres, Y. (2006). A stable marriage of Poisson and Lebesgue. *Ann. Prob.*, 1241-1272.
- [۷] Hoffman, C., Holroyd, A. E. and Peres, Y. (2009). Tail bounds for the stable marriage of Poisson and Lebesgue. *Canad. J. Math.*, **61(6)**, 1279.
- [۸] Holroyd, A. E. and Peres, Y. (2005). Extra heads and invariant allocations. *Ann. Prob.*, 31-52.
- [۹] Kallenberg, O. (2002). *Foundations of Modern Probability*. Springer Science & Business Media.

- [10] Kallenberg, O. (2007). Invariant measures and disintegrations with applications to Palm and related kernels. *Probability theory and related fields*, **139(1-2)**, 285-310.
- [11] Korman, J. and McCann, R. (2015). Optimal transportation with capacity constraints. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **367(3)**, 1501-1521.
- [12] Last, G., Mörters, P. and Thorisson, H. (2014). Unbiased shifts of Brownian motion. *Ann. Prob.*, **42(2)**, 431-463.
- [13] Last, G. and Thorisson, H. (2009). Invariant transports of stationary random measures and mass-stationarity. *Ann. Prob.*, 790-813.
- [14] Liggett, T. M. (2002). Tagged particle distributions or how to choose a head at random. *In and out of equilibrium*, 133-162, Birkhäuser Boston.
- [15] Matthes, K. (1963). Stationäre zufällige Punktfolgen I. *Jber. Deutsch. Math.-Verein.* **66**, 66–79. MR0160265.
- [16] Mecke, J. (1967). Stationäre zufällige Maße auf lokalkompakten abelschen Gruppen. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, **9(1)**, 36-58.
- [17] Schneider, R. and Weil, W. (2008). *Stochastic And Integral Geometry*, Springer.
- [18] Thorisson, H. (1996). Transforming random elements and shifting random fields. *Ann. Prob.*, **24(4)**, 2057-2064.
- [19] Thorisson, H. (1999). Point stationarity in d dimensions and Palm theory. *Bernoulli*, **5(5)**, 797-831.
- [20] Villani, C. (2008). *Optimal transport: old and new*. Springer Science & Business Media.

Mass Transport Between Stationary Random Measures

Abstract

Given two stationary random measures on $\mathbb{R}^d$, we study transport kernels between them that are translation-covariant. We will provide an algorithm that constructs such a transport kernel, with some assumption on their intensities. As a result, this algorithm can be used to construct the Palm version of an ergodic random measure by simply applying a (random) translation and vice versa, to reconstruct the distribution of the random measure from its Palm distribution. Given realizations of the two random measures, our algorithm provides its result in a deterministic way. The existence of such transport kernels is proved in [18] in an abstract way. Nevertheless, there has been tremendous interest in constructive algorithms in recent years. Our method is a generalization of [6] which constructs a transport kernel between the Lebesgue measure and an ergodic point process in $\mathbb{R}^d$. In the general case, we define and limit ourselves to constrained transport kernels and constrained transport densities. We will also define stability of constrained transport densities inspired by the notion of stable matchings in graphs. Limiting to constrained transport densities is a key point in our algorithm and the result of the algorithm is stable. For stable constrained transport densities, we study some properties like existence and uniqueness, monotonicity in terms of the two measures and boundedness.

Constructing an allocation (i.e. a translation-covariant transport map) has been of more interest in the literature. We will study conditions for existence of allocations, study special cases that our algorithm yields an allocation and provide other algorithms to construct allocations under some assumptions. As a tool for proving some results, we introduce and study some properties of Voronoi transport kernel for a measure, which is a generalization of Voronoi tessellation.

Keywords: Random Measure, Stationary, Palm Distribution, Mass Transport, Stable Matching, Capacity Constrained Transport Kernel, Voronoi Transport Kernel, Shift Coupling.



Sharif University of Technology
Department of Mathematical Sciences

PhD Thesis
Pure Mathematics

Mass Transport Between Stationary Random Measures

By
Ali Khezeli

Supervisor
Dr. Kasra Alishahi

Co-Supervisor
Dr. Mir-Omid Haji-Mirsadeghi

September 2016

